

TAREA 3: FÍSICA II

- **RESUME DEL CAPÍTULO 22 “LEY DE GAUSS”.**
- **LIBRO:** HUGH. YOUNG, ROGER A. FREEDEMAN. SEARS Y ZEMANSKY
“FÍSICA UNIVERSITARIA CON FÍSICA MODERNA VOLUMEN 2”.
- **ALUMNO:** JONATAN MÁRQUEZ

Ley de Gauss

La ley de Gauss es sin duda algo más que un método para hacer ciertos cálculos con facilidad. En realidad es un enunciado fundamental acerca de la relación que hay entre las cargas eléctricas y los campos eléctricos. La ley de Gauss ayuda a entender cómo se distribuye la carga en los cuerpos conductores.

La ley de Gauss se trata de lo siguiente. Dada cualquier distribución general de carga, se rodea con una superficie imaginaria que la encierre y luego se observa el campo eléctrico en distintos puntos de esa superficie imaginaria. La ley de Gauss es una relación entre el campo en todos los puntos de la superficie y la carga total que ésta encierra. La ley de Gauss ayuda a tener una comprensión más profunda de los campos eléctricos.

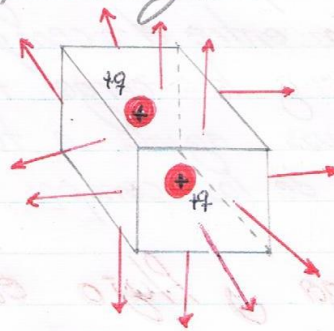
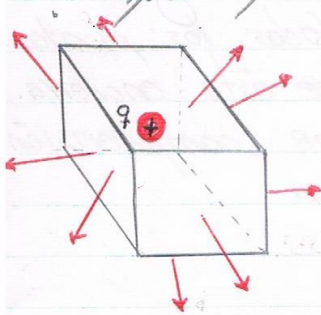
Carga y Flujo eléctrico

Si se conoce la disposición del campo eléctrico en una región determinada, ¿qué podemos determinar acerca de la distribución de carga en esa región?

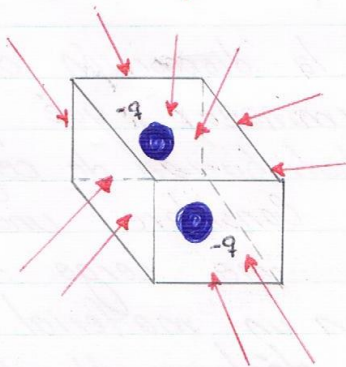
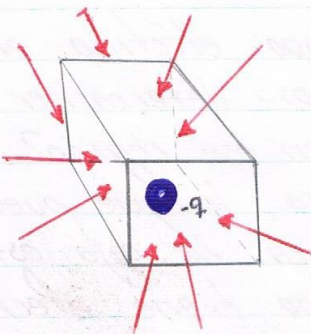
Un ejemplo. Considere una caja, la que puede contener o no una carga eléctrica. La caja está construida con un material que no tiene efecto ningún campo eléctrico. Nuestra caja representa una superficie imaginaria que puede encerrar o no cierta carga. Llamemos a la caja una superficie

cerrada, ya que encierra por completo un volumen.
¿Cómo determinar cuánto carga eléctrica (si es que la hay) se encuentra dentro de la caja?

Para determinar el contenido de la caja, en realidad sólo se necesita medir $\vec{E}$ en la superficie de la caja. En las siguientes figuras, hay una y dos cargas puntuales positivas en el interior de la caja. Los patrones de campo en las superficies de las cajas son diferentes es sus detalles, pero en ambas cosas el campo eléctrico apunta hacia fuera de la caja. En el caso de una y dos cargas negativas, los detalles en las superficies de las cajas son distintos, pero en los dos casos el campo apunta hacia la caja.



⇒ cargas positivas
dentro de la caja,
flujo hacia fuera.



⇒ Cargas negativas
dentro de la caja
flujo hacia dentro.

El flujo eléctrico y la carga encerrada

Se mencionó la analogía entre los vectores de campo eléctrico y los vectores de velocidad de un fluido en movimiento. Esta analogía resulta útil aun cuando los campos eléctricos no fluyen en realidad.

Utilizando esta analogía en las siguientes figuras, en las que los vectores de campo eléctrico apuntan hacia fuera, decimos que existe un flujo eléctrico saliente. Cuando los vectores $\vec{E}$ se dirigen hacia la superficie, el flujo eléctrico es entrante.

La relación es sencilla, carga positiva adentro de la caja, flujo saliente. Carga negativa, flujo entrante.

Cuando la caja está vacía y $\vec{E} = 0$ en todo lugar, no hay flujo eléctrico hacia el interior o exterior de la caja. Cuando tenemos una carga positiva y otra negativa de igual magnitud, la mitad positiva tiene flujo eléctrico hacia fuera y la mitad negativa tiene flujo hacia dentro. Por lo tanto no tiene flujo eléctrico neto hacia dentro o hacia fuera.

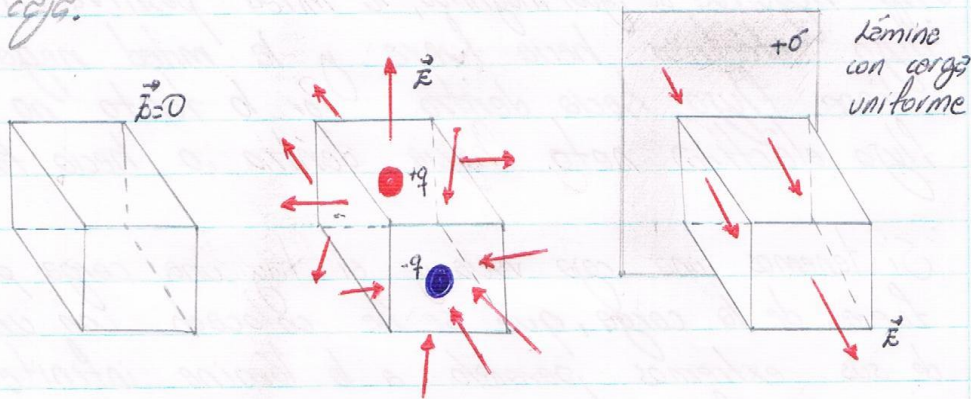
Si tenemos una caja vacía y si hay una carga presente fuera de la caja, que se ha colocado con uno de sus extremos paralelo a la lámina infinita, con carga uniforme que produce un campo eléctrico uniforme perpendicular a la lámina. En un extremo de la caja $\vec{E}$ apunta hacia esta última, y al extremo opuesto $\vec{E}$ apunta hacia fuera de la caja; y en los lados, $\vec{E}$ es paralelo a la superficie, por lo que no apunta hacia dentro ni hacia fuera de la

caja. El flujo eléctrico hacia el interior en una parte de la caja compensa con exactitud al flujo eléctrico que va al exterior en la otra parte.

De manera que no hay flujo eléctrico neto a través de la superficie de la caja, y ninguna carga neta está encerrada en ella.

Existe una conexión entre la magnitud de la carga neta dentro de la superficie cerrada, y la intensidad del "flujo" neto de $\vec{E}$ en la superficie. Si tenemos un carga puntual en el interior de una superficie, y luego le añadimos otra de igual magnitud y signo; la carga es el doble de grande, por lo que $\vec{E}$ tiene en todo lugar el doble de la magnitud que tendría con una sola carga.

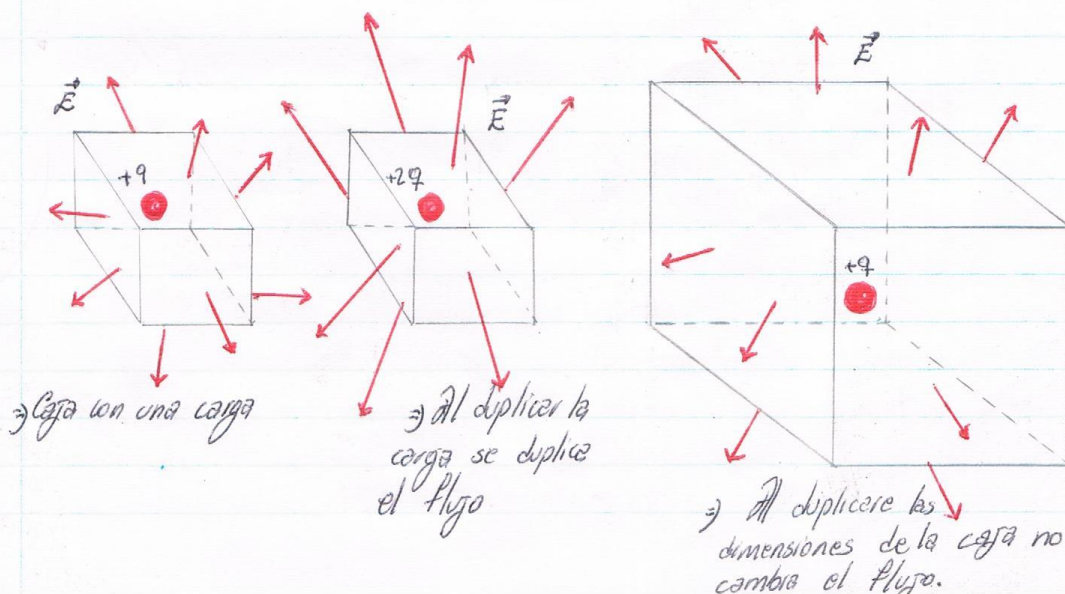
Esto sugiere que el flujo total neto a través de la superficie de la caja, es directamente proporcional a la magnitud de la carga neta encerrada en la caja.



¿Que sucede si colocamos una carga $+q$ en una caja con dimensiones lineales de 4 veces más grande?

Debemos que la magnitud del campo eléctrico de una carga puntual disminuye con la distancia de acuerdo con $1/r^2$, de manera que la magnitud media de $\vec{E}$ en cada cara de la caja grande es $1/4$ de la magnitud media en la cara correspondiente. Pero cada cara de la caja grande tiene 4 veces el área de la caja pequeña en cada cara correspondiente. Por lo tanto, el flujo eléctrico saliente es igual para las dos cajas.

Con respecto a cada cara de la caja, hay que calcular el producto de la componente perpendicular media de $\vec{E}$ por el área de esa cara; luego sumamos el resultado del área de todas las caras de la caja. Con esta definición, el flujo eléctrico neto debido a una carga puntual dentro de la caja, es independiente del tamaño de ésta y sólo depende de la carga neta encerrada.



Evalúe su comprensión: Si todas las dimensiones de la caja $2 \times 2 \times 2$ se incrementan en un factor de 3, ¿qué efecto tendría este cambio en el flujo eléctrico a través de la caja?

- 1) El flujo sería $3^2 = 9$ veces mayor;
- 2) el flujo sería 3 veces más grande;
- 3) el flujo permanecería sin cambio;
- 4) el flujo sería $(1/3)$;
- 5) el flujo sería $(1/3)^2 = 1/9$;
- 6) no hay información suficiente para decidir.

Respuesta: 3. Cada elemento de la superficie de la caja estará tres veces más lejos de la carga $+q$, por lo que el campo eléctrico será $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ de la intensidad. Pero el área de la caja se incrementará en un factor de $3^2 = 9$. De ahí que el flujo eléctrico será multiplicado por un factor de $(\frac{1}{9})/(\frac{1}{9}) = 1$. En otras palabras el flujo no cambiará.

Cálculo del flujo eléctrico

Los conceptos hasta entonces vistos se utilizarán para formular un enunciado cualitativo de la ley de Gauss: el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es directamente proporcional a la carga neta en el interior de esa superficie. Para aprovechar esta ley, necesitamos saber cómo calcular el flujo eléctrico. Se utilizará la analogía entre el campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo de los vectores de velocidad $\vec{v}$ en un fluido en movimiento.

Flujo: Analogía del fluido en movimiento

Si examinamos la tasa del flujo volumétrico dV/dt (digamos, en metros cúbicos por segundo) a través de un alambre rectangular de área A . Cuando la velocidad del flujo $\vec{v}$ y la velocidad de flujo es la misma en todas las partes del fluido, la tasa de flujo volumétrico dV/dt es el área A por la velocidad del flujo v :

$$\frac{dV}{dt} = v \cdot A$$

Cuando el rectángulo se encuentra inclinado un ángulo ϕ de manera que su cara no es perpendicular a $\vec{v}$, el área que se toma en cuenta es de la silueta que se genera al mirar en la dirección de $\vec{v}$. Esta área se denota $A_{\perp}$. Dos lados del rectángulo proyectado tienen la misma longitud que en el original, pero los otros dos disminuyen un factor de

$\cos \phi$, por lo que el área proyectada $A_{\perp}$ es $A \cdot \cos \phi$. Así la tasa de flujo volumétrico a través de A es:

$$\frac{dV}{dt} = v \cdot \cos \phi$$

Si $\phi = 90^\circ$, $dV/dt = 0$ ningún flujo pasa sobre el.

$v \cdot \cos \phi$ es la componente del vector $\vec{v}$ perpendicular al plano del área A . Si se llama $v_{\perp}$ a esta componente, la tasa de flujo volumétrico queda:

$$\frac{dV}{dt} = v_{\perp} A$$

Podemos expresar la tasa de flujo volumétrico de una manera más compacta, mediante el concepto de vector de área $\vec{A}$. El vector de área $\vec{A}$ describe tanto el tamaño de un área como su orientación en el espacio. En términos de $\vec{A}$, podemos la tasa flujo volumétrico como el producto escalar:

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Flujo de un campo eléctrico uniforme.

El flujo eléctrico se define de igual forma a la tasa de flujo volumétrico. Sustituimos $\vec{v}$ por el campo eléctrico $\vec{E}$. El símbolo que se usa para flujo eléctrico es Φ_E letra griega mayúscula fi. Considerando un área plana A perpendicular a un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$, se define el flujo eléctrico a través de esta área como:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot A$$

Se puede imaginar Φ_E como las líneas de campo que pasan a través de A . El incremento del área significa que más líneas de $\vec{E}$ cruzaron el área, lo que aumenta el flujo; un campo más intenso significa mayor densidad de líneas $\vec{E}$, por lo que hay más líneas que pasan por unidad de área, por lo que también aumenta el flujo.

Si el área A es plana pero no perpendicular al campo $\vec{E}$, son menos las líneas de campo que la atraviesan. En este caso, el área que se toma en cuenta es la silueta que se observe al mirar en la dirección de $\vec{E}$. Esta área $A_{\perp}$ es igual a $A \cos \phi$. Nuestra definición se generaliza:

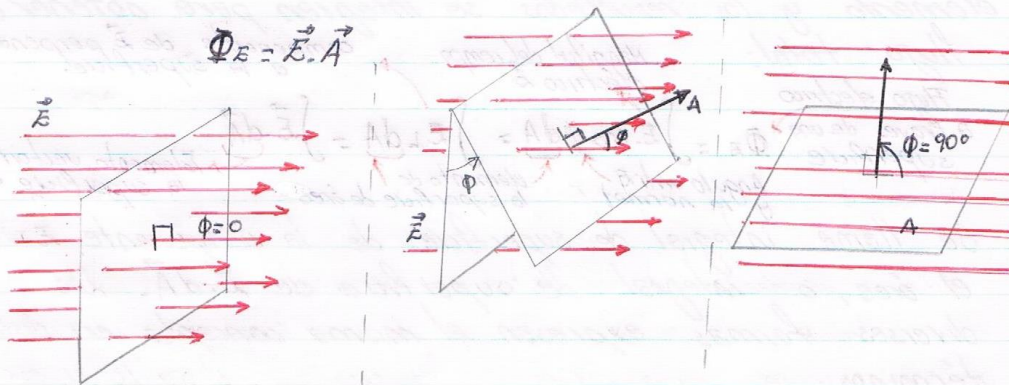
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot A \cos \phi$$

Como $E \cos \phi$ es la componente $\vec{E}$ perpendicular se expresa:

$$\Phi_E = E_{\perp} A$$

En términos del vector de área $\vec{A}$ perpendicular al área, el flujo eléctrico se expresa como el producto escalar de $\vec{E}$ y $\vec{A}$:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$



La unidad del SI para flujo eléctrico es $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. Si el área está de perfil respecto al campo, $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares y el flujo es igual a cero.

La dirección de un vector de área se puede representar con $\vec{A}$ empleando un vector unitario $\hat{n}$ perpendicular al área; $\hat{n}$ significa "normal." De esta forma,

$$\vec{A} = A \cdot \hat{n}$$

Una superficie tiene dos lados, por lo que hay dos direcciones posibles para $\hat{n}$ y $\vec{A}$. Siempre se debe especificar cuál es la dirección elegida.

Flujo en un campo eléctrico no uniforme

Al no tener un campo eléctrico uniforme o al tener una superficie curva, se divide A en muchas elementos pequeños dA , cada uno tiene un vector unitario $\hat{n}$ perpendicular a él, y un vector de área $d\vec{A} = \hat{n} dA$.

El flujo eléctrico se calcula a través de cada elemento y los resultados se integran para obtener el

flujo total:

Flujo eléctrico a través de una superficie

$$\Phi_E = \int E \cos \phi dA = \int E_{\perp} dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Magnitud del campo eléctrico E

componente de $\vec{E}$ perpendicular a la superficie.

Ángulo entre $\vec{E}$ y la normal

elemento de la superficie de área

Elemento vectorial de la superficie de área

Se llama integral de superficie de la componente $E_{\perp}$ en el área, o integral de superficie de $\vec{E} \cdot d\vec{A}$. Las diversas formas expresan el mismo concepto en distintos términos.

En la ecuación el flujo eléctrico $\int E_{\perp} dA$ es igual al valor medio de la componente perpendicular del campo eléctrico,

multiplicado por el área de la superficie.

Ejemplo: Flujo eléctrico a través de un disco

Un disco de radio igual a $0,10\text{ m}$ está orientado con su vector unitario $\hat{n}$ a un ángulo de 30° con respecto a un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ con magnitud de $2,0 \times 10^3\text{ N/C}$. (Como esta no es una superficie cerrada, no tiene un "interior" ni un "exterior" por lo que se tiene que especificar la dirección de $\hat{n}$) a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco? b) ¿Cuál sería el flujo del disco si se girara de manera que $\hat{n}$ fuera perpendicular a $\vec{E}$? c) ¿Cuál sería el flujo que pasaría a través del disco si $\hat{n}$ fuera paralelo a $\vec{E}$?

a). El área es $A = \pi(0,10\text{ m})^2 = 0,0314\text{ m}^2$

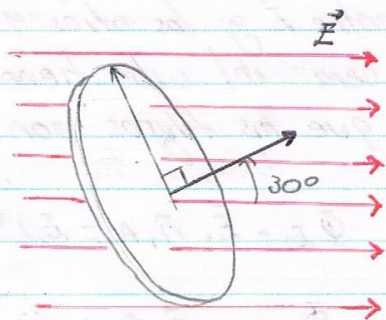
y el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A} = A\hat{n}$ es

$\phi = 30^\circ$, por lo que

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \cos \phi =$$

$$(2,0 \times 10^3\text{ N/C})(0,0314\text{ m}^2)(\cos 30^\circ) =$$

$$54\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$



b). Ahora la normal al disco es perpendicular a $\vec{E}$, de manera que $\phi = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$ y $\Phi = 0$

c). La normal al disco es paralelo a $\vec{E}$, por lo que $\phi = 0$ y $\cos 0 = 1$

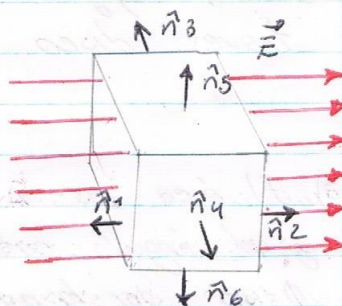
$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} \cos \phi = (2,0 \times 10^3\text{ N/C})(0,0314\text{ m}^2)(1) = 63\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

Ejemplo: Flujo eléctrico a través de un cubo.

Una superficie cubica imaginaria de lado L está situada en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. Determine el flujo eléctrico que pase a través de cada cara del cubo y el flujo total a través de éste, cuando a) el cubo está orientado con dos de sus caras perpendiculares al campo $\vec{E}$ b) Cuando el cubo se gira un ángulo θ , con respecto a un eje vertical.

Identificar: Se trata de un caso de campo $\vec{E}$ uniforme en superficie plana.

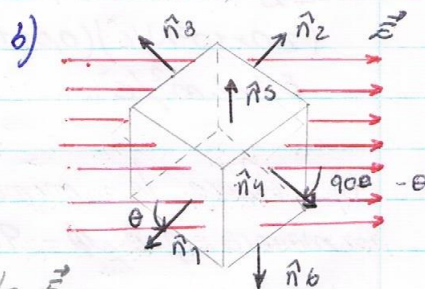
a) El ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}_1$ es de 180° ; el ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}_2$ es de 0° ; y el ángulo entre $\vec{E}$ y las otras 4 vectores es 90° . Cada cara del cubo tiene el área igual L^2 , por lo que los flujos son:



$$\Phi_{E1} = \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = E \cdot L^2 \cos 180^\circ = -EL^2$$

$$\Phi_{E2} = \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = E \cdot L^2 \cos 0^\circ = +EL^2$$

$$\Phi_{E3} = \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = E \cdot L^2 \cos 90^\circ = 0$$



El flujo es negativo en la cara 1, donde $\vec{E}$ está dirigido hacia el cubo y positivo en la cara 2, donde $\vec{E}$ se dirige hacia afuera del cubo. El flujo total es:

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$$

$$\Phi_E = -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

b) El campo $\vec{E}$ está dirigido hacia los ceros 1 y 3, de modo que los flujos a través de ellos son negativos; el campo $\vec{E}$ está dirigido hacia afuera de los ceros 2 y 4, de modo que los flujos a través de ellas son positivos. Se tiene que:

$$\Phi_{E1} = \vec{E} \cdot \vec{n}_1 A = EL^2 \cos(180^\circ - \theta) = -EL^2 \cos \theta$$

$$\Phi_{E2} = \vec{E} \cdot \vec{n}_2 A = +EL^2 \cos \theta$$

$$\Phi_{E3} = \vec{E} \cdot \vec{n}_3 A = EL^2 \cos(90^\circ + \theta) = -EL^2 \sin \theta$$

$$\Phi_{E4} = \vec{E} \cdot \vec{n}_4 A = EL^2 \cos(90^\circ - \theta) = +EL^2 \sin \theta$$

$$\Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90^\circ = 0$$

$$\text{Flujo total: } \Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6} = 0$$

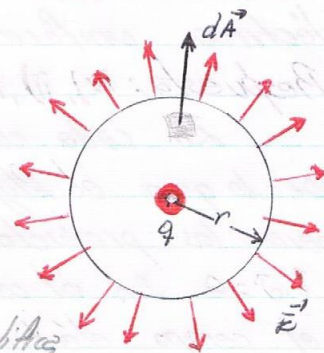
Ejemplo: Flujo eléctrico a través de una esfera.

Una carga puntual $q = +3.0 \mu\text{C}$ está rodeada por una esfera imaginaria centrada en la carga y cuyo radio mide 0.20 m . Determine el flujo eléctrico a través de la esfera.

Identificar: En este caso la superficie no es plana y el campo $\vec{E}$ no es uniforme.

La dirección positiva tanto para $\hat{n}$ como para $\vec{E}$ es hacia el exterior, por lo que $\vec{E} \perp \vec{n}$ y el flujo a través del elemento de superficie dA es $\vec{E} \cdot d\vec{A}$, lo cual simplifica gran medida la integral:

$$\Phi_E = \int E dA.$$



$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ por lo tanto E se puede sacar de la

integral la cual se convierte en $\Phi_E = E \int dA = E \cdot A$.
El área de la esfera es $4\pi r^2$, entonces el flujo
total que sale de la esfera es:

$$\Phi_E = E \cdot A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{3.0 \times 10^{-6} \text{ C}}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2} = 3.4 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

Evalúe su comprensión: Ordene las siguientes superficies
del flujo eléctrico más positivo al más negativo. i. Una
superficie rectangular plana con vector área $\vec{A} = (6.0 \text{ m}^2)\hat{z}$
en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0 \text{ N/C})\hat{x}$; ii. una
superficie circular plana con vector área $\vec{A} = (3.0 \text{ m}^2)\hat{y}$
en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0 \text{ N/C})\hat{x} + (2.0 \text{ N/C})\hat{y}$;
iii. Una superficie cuadrada plana con vector área
 $\vec{A} = (3.0 \text{ m}^2)\hat{x} + (7.0 \text{ m}^2)\hat{y}$ en un campo eléctrico uniforme
 $\vec{E} = (4.0 \text{ N/C})\hat{x} - (2.0 \text{ N/C})\hat{y}$; iv. Una superficie oval plana
con vector área $\vec{A} = (3.0 \text{ m}^2)\hat{x} - (7.0 \text{ m}^2)\hat{y}$ en un campo
eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0 \text{ N/C})\hat{x} + (2.0 \text{ N/C})\hat{y}$.

Respuesta: iv), ii), i), iii)

En cada caso, el campo eléctrico es uniforme,
por lo que el flujo es $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$. Se usan las relaciones
para los productos escalares de vectores unitarios: $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = 1$,
 $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$. En el caso i) se tiene $\Phi_E = (4.0 \text{ N/C})(6.0 \text{ m}^2)\hat{x} \cdot \hat{z} = 0$
(el campo eléctrico y el vector de área son perpendiculares,
por lo que el flujo es nulo). En el caso ii) se tiene
 $\Phi_E [(4.0 \text{ N/C})\hat{x} + (2.0 \text{ N/C})\hat{y}] \cdot [(3.0 \text{ m}^2)\hat{y}] = (4.0 \text{ N/C})(3.0 \text{ m}^2) -$
 $(2.0 \text{ N/C})(7.0 \text{ m}^2) = -2 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$, y en el caso iv)

se tiene $\Phi_E = [(4.0 \text{ N/C})^2 \cdot (2.0 \text{ N/C})^2] \cdot [(3.0 \text{ m}^2) + (7.0 \text{ m}^2)] =$
 $(4.0 \text{ N/C}) \cdot (3.0 \text{ m}^2) + (2.0 \text{ N/C}) \cdot (7.0 \text{ m}^2) = 26 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$

LEY de Gauss

La ley de Gauss es otra forma alternativa de la ley de Coulomb. Aunque es exactamente equivalente de la ley de Coulomb, la ley de Gauss es una forma distinta de expresar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico.

Carga puntual dentro de una superficie esférica

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie.

El campo de una sola carga puntual positiva q , las líneas de campo se extienden en forma radial hacia fuera en todas las direcciones por igual. Al colocar esta carga en el centro de una superficie esférica imaginaria con radio R . La magnitud E del campo eléctrico en cada punto de la superficie es:

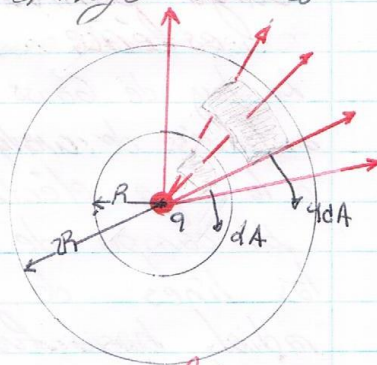
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

En cada punto de la superficie, $\vec{E}$ es perpendicular a ésta, y su magnitud es la misma en todos los puntos. El flujo eléctrico es producto de la magnitud E por el área $A = 4\pi R^2$.

$$\Phi_E = E \cdot A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Por lo tanto el flujo eléctrico es independiente del radio de la esfera, sólo depende de la carga encerrada.

En una esfera de radio R se resalta un área dA y se proyecta sobre la esfera de radio $2R$ con líneas que van del centro y que pasen por puntos sobre la frontera de dA . El área proyectada es $4dA$. Como el campo es inversamente proporcional a r^2 , la magnitud de $2R$ es $\frac{1}{4}$ de la magnitud de R . Y como el área de $2R$ es 4 veces mayor, el flujo eléctrico es el mismo.



Carga puntual de una superficie no esférica

Esta técnica de proyección demuestra cómo generalizar el análisis a superficies no esféricas.

En una esfera de radio R circundada por una superficie de forma irregular, en vez de por una segunda esfera. Considere un pequeño elemento dA sobre la superficie irregular; se observa que esta área es mayor que el elemento correspondiente sobre la superficie esférica a la misma distancia de q . Si una normal a dA forma un ángulo ϕ con una línea radial que sale de q , dos veces el área proyectada

sobre la superficie esférica se ven disminuidas un factor $\cos \phi$. De esta forma, el flujo eléctrico a través de una superficie esférica es igual al flujo $E dA \cos \phi$ a través del elemento de superficie irregular.

Se puede dividir toda la superficie irregular en elementos dA , calcular para cada uno de ellos el flujo eléctrico $E dA \cos \phi$, y sumar los resultados por integración. Cada uno de los elementos de área se proyecta sobre un elemento de superficie correspondiente. Así, el flujo eléctrico total que atraviesa la superficie irregular, dado por cualquier forma, es el mismo que el flujo total de la esfera, el cual es igual q/ϵ_0 . Por lo tanto para la superficie irregular:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Esta ecuación se cumple para cualquier superficie cerrada que contenga en su interior una carga encerrada. El círculo en el signo de integración nos recuerda que se trata de una superficie cerrada.

Además, Φ_E es positiva en los puntos que $\vec{E}$ apunta hacia el exterior y negativa en los que $\vec{E}$ apunta al interior.

Si la carga puntual es negativa, el campo $\vec{E}$ está dirigido en forma radial hacia dentro; en este caso el ángulo entre la normal y el campo es mayor que 90° , siendo su coseno negativo, y la integral es negativa. Como q también es negativa, la ecuación también se cumple.

En una superficie cerrada que no encierra carga;

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Este enunciado indica que cuando una región no contiene carga, las líneas de campo producidas por una carga afuera del campo entran por un lado y salen por el otro.

Las líneas de campo eléctrico comienzan o terminan dentro de una región del espacio sólo cuando en esa región existe carga.

Forma general de la ley de Gauss

Supongamos que la superficie encierra no solo una sino que varias cargas, $q_1, q_2, q_3, \dots$. El campo eléctrico resultante $\vec{E}$ en cualquier punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las cargas individuales. Sea Q_{enc} la carga total encerrada por la superficie. Sea $\vec{E}$ el campo total en la posición del elemento de área de la superficie $d\vec{A}$, y $E_{\perp}$ su componente perpendicular al plano de ese elemento dA . Luego, se puede escribir la ecuación $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ para cada carga y su campo correspondiente y luego sumar los resultados. Enunciado general Ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Carga total encerrada

Flujo eléctrico a través de una superficie cerrada de área A = integral de superficie $\vec{E}$

Constante eléctrica

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0 .

Formas equivalentes de expresar la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint E \cos \phi \, dA = \oint E_{\perp} dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Magnitud campo Eléctrico
 Componente $\vec{E}$ perpendicular a la superficie
 carga total encerrada
 Constante eléctrica
 ángulo entre $\vec{E}$ y la normal a la superficie
 Flujo eléctrico a través de superficie cerrada
 Elemento de la superficie

En el siguiente ejemplo se muestra una superficie gaussiana de radio r alrededor de una carga puntual positiva $+q$. El campo eléctrico apunta hacia fuera de la superficie; por lo que cada punto de la superficie, $\vec{E}$ está en la misma dirección que $d\vec{A}$, $\phi = 0$ y $E_{\perp}$ es igual a la magnitud del campo $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Como E es el mismo en todos los puntos de la superficie, se puede sacarlo de la integral en la ecuación, de manera que la integral que queda es $\int dA = A = 4\pi r^2$, que es el área de la esfera. Así se convierte en:

$$\Phi_E = \oint E_{\perp} dA = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La carga Q_{enc} encerrada sólo es la carga $+q$ lo que concuerda con la ley de Gauss.

Si la superficie gaussiana encierra una carga puntual negativa, entonces $\vec{E}$ apuntaría hacia el interior de la superficie en cada punto en la dirección opuesta a $d\vec{A}$. Así, $\phi = 180^\circ$ y $E_\perp$ es igual al negativo de la magnitud del campo: $E_\perp = -E = -1/4\pi\epsilon_0 r^2 = -q/4\pi\epsilon_0 r^2$. De esta forma la ecuación se convierte:

$$\Phi_E = \oint E_\perp dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA =$$

$$\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

De nuevo concuerda con la ley de Gauss.

En esta ecuación Q_{enc} siempre es la suma algebraica de todas las cargas positivas y negativas encerradas en la superficie gaussiana y $\vec{E}$ es el campo total en cada punto de la superficie.

Las cargas en el exterior no contribuyen al flujo total (neto) a través de la superficie.

Cuando $Q_{enc} = 0$, el flujo total a través de la superficie gaussiana es igual a cero, aunque ciertas áreas tienen flujo positivo y otras flujo negativo.

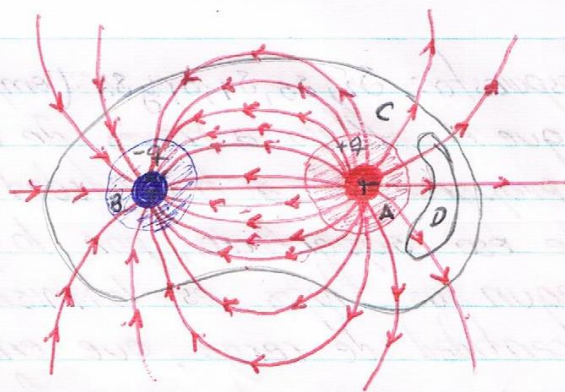
Ejemplo: Flujo eléctrico y carga encerrada.

La figura muestra el campo producido por dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ de igual magnitud y signos opuestas (un dipolo eléctrico). Determine el flujo eléctrico a través de las superficies cerradas, A, B, C y D.

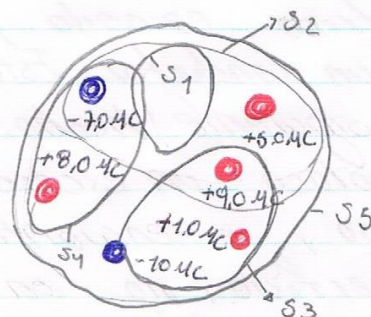
Solución:

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga total encerrada dividida entre ϵ_0 .

Por inspección de la figura, la superficie A encierra la carga positiva, por lo que $Q_{enc} = +q$; la superficie B contiene la carga negativa de manera que $Q_{enc} = -q$; la superficie C encierra las dos cargas, y tiene $Q_{enc} = +q + (-q) = 0$; y la superficie D, no encierra cargas y también tiene $Q_{enc} = 0$. De manera que podemos concluir que los flujos totales para las diversas superficies son $\Phi_E = +q/\epsilon_0$ para la superficie A, $\Phi_E = -q/\epsilon_0$ para la B y $\Phi_E = 0$ para la superficie C y D.



Evalúe su comprensión: En la siguiente figura se ilustran seis cargas puntuales que están en el mismo plano. Hay cinco superficies gaussianas - S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 que encierran, cada una, parte de este plano y la figura presenta la intersección de cada superficie con el plano. Clasifique las cinco superficies en orden del flujo eléctrico que pasa a través de ellas, del más positivo al más negativo.



Respuesta: S_2, S_5, S_4, S_1 y S_3 (empate) La ley de Gauss afirma que el flujo a través de una superficie cerrada es proporcional a la cantidad de carga encerrada dentro de esa superficie, por lo que ordenar estas superficies según sus flujos es lo mismo que hacerlo según la cantidad de carga que encierran. La superficie S_1 no encierra carga, la superficie S_2 encierra $9.0 \mu\text{C} + 5.0 \mu\text{C} + (-7.0 \mu\text{C}) = 7.0 \mu\text{C}$, la superficie S_3 encierra $9.0 \mu\text{C} + 1.0 \mu\text{C} + (-10.0 \mu\text{C}) = 0$, la superficie S_4 encierra $8.0 \mu\text{C} + (-7.0 \mu\text{C}) = 1.0 \mu\text{C}$, y la superficie S_5 encierra $8.0 \mu\text{C} + (-7.0 \mu\text{C}) + (-10.0 \mu\text{C}) + (1.0 \mu\text{C}) + (9.0 \mu\text{C}) + (5.0 \mu\text{C}) = 6.0 \mu\text{C}$.

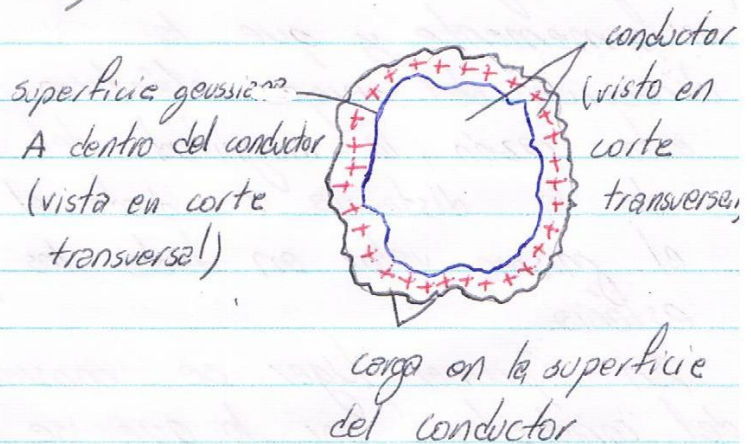
Aplicaciones de la ley de Gauss

La ley de Gauss es válida para cualquier distribución de carga y cualquier superficie cerrada. Esta ley se puede utilizar de dos maneras. Si conocemos la distribución de carga y si tiene simetría que permita evaluar la integral en la ley de Gauss, se puede obtener el campo. O conociendo el campo, podemos conocer la distribución de carga, como las cargas en superficies conductoras.

En problemas prácticos es frecuente encontrar situaciones en las que se desea conocer el campo eléctrico causado por una distribución de carga en un conductor. Estos cálculos se facilitan por el siguiente hecho: cuando en un conductor sólido se coloca un exceso de carga que se encuentra en reposo, se encuentra en su totalidad en la superficie, no en el interior del material.

La demostración es la siguiente, se sabe que

en una situación electrostática (con todas las cargas en reposo) el campo eléctrico $\vec{E}$ en cada punto en el interior de un material conductor es igual a cero. Si $\vec{E}$ no fuera cero, las cargas en exceso se moverían. Supongamos que se construye una superficie gaussiana dentro del conductor, como la superficie A en la siguiente figura. Como $\vec{E}$ es en cualquier lugar de la superficie, la ley de Gauss requiere que la carga neta dentro de la superficie sea igual a cero. Ahora imaginemos que se comprime la superficie como un globo que se desinfla hasta que encierre una región tan pequeña que se considere un punto P; la carga en ese punto debe ser igual a cero. Esto se puede hacer en cualquier parte dentro del conductor, por lo que no puede haber carga en exceso en ningún punto dentro de un conductor sólido; toda carga excedente debe encontrarse en la superficie del conductor.



Ejemplo: Campo de una esfera conductora con carga.

Se coloca una carga positiva q en una esfera conductora sólida de radio R . Determine $\vec{E}$ en cualquier punto en el interior o en el exterior de la esfera.

Identificar: Como se ve toda la carga debe encontrarse en la superficie de la esfera. El sistema tiene simetría esférica.

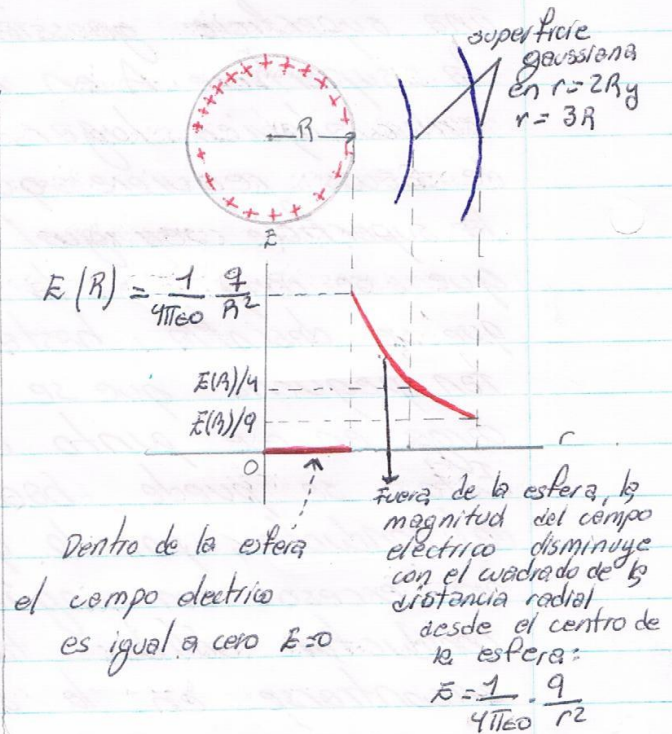
Plantear:

Para calcular el campo afuera del conductor, se toma r de forma que sea mayor que el radio R del conductor; para obtener el campo en el interior, se toma r menor que R .

Ejecutar: La simetría muestra que la carga está distribuida uniformemente y que la

dirección del campo eléctrico debe ser radial. Por esta razón, la magnitud del campo E sólo depende de la distancia r desde el centro y debe tener el mismo valor en todos los puntos de una superficie esférica.

En primer lugar se considera el campo fuera del conductor, por lo que se elige $r > R$. Todo el conductor se encuentra dentro de la superficie gaussiana, de manera que la carga encerrada es q . El área de la superficie gaussiana es $4\pi r^2$; $\vec{E}$ es uniforme a la superficie y perpendicular a cada uno



de sus puntos. Por lo anterior, la integral del flujo $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ en la superficie gaussiana es $E(4\pi r^2)$ y esto es:

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Esta expresión del campo en cualquier punto afuera de la esfera ($r > R$) es la misma para una carga puntual; el campo debido a la esfera con carga es equivalente al que habría si toda la carga estuviera concentrada en su centro. Inmediatamente afuera de la superficie de la esfera, donde $r = R$,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

Para calcular $\vec{E}$ dentro del conductor, se usa una superficie gaussiana esférica con radio $r < R$. La simetría esférica dice que $E(4\pi\epsilon_0) = Q_{enc}/\epsilon_0$. Pero como toda la carga está en la superficie del conductor, la superficie gaussiana no encierra carga, por lo que $Q_{enc} = 0$, y el campo eléctrico en el interior del conductor es igual a cero.

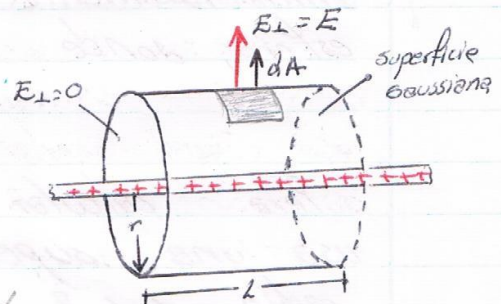
Evaluación:

- ⇒ Observe que al límite, cuando $R \rightarrow 0$ la esfera se convierte en una carga puntual; así sólo hay un exterior, y el campo está dado en cualquier parte por $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Así, se ha deducido la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss.
- ⇒ Este método también se aplica a un conductor con forma de cascarón esférico (un conductor esférico a un hueco en el centro), si dentro del agujero no hay carga.

Ejemplo: Campo de una carga lineal.

Una carga eléctrica está distribuida de manera uniforme a lo largo de un alambre de longitud infinita. La carga por unidad de longitud es λ (se supone positiva). Se trata de encontrar el campo eléctrico. (Esta es una representación aproximada del campo de un alambre finito con carga uniforme, siempre y cuando la distancia del punto del campo al alambre sea mucho menor que la longitud del alambre.)

Identificar: El sistema tiene simetría cilíndrica. El campo debe apuntar hacia fuera de las cargas positivas. Para determinar la dirección de $\vec{E}$ con más precisión, así como demostrar el modo en que su magnitud depende de la posición, se usa la simetría.



Plantear: La simetría cilíndrica nos asegura que $\vec{E}$ no cambia. El campo no puede tener ninguna componente paralela al conductor. No puede tener componente tangente a un círculo en el plano perpendicular al alambre con su centro en el alambre. Lo que queda es una componente radial hacia fuera del conductor en cada punto. Por lo tanto, las líneas de campo afuera de un alambre infinito con carga uniforme son radiales y se localizan en planos perpendiculares al alambre. La magnitud del campo sólo depende de la distancia radial desde el alambre.

Estas propiedades de simetría sugieren que, como superficie gaussiana, se utiliza un cilindro con radio arbitrario r y longitud arbitraria L , con sus extremos perpendicular al conductor.

Ejecutar:

El flujo a través de las caras planas de la superficie gaussiana es cero porque el campo eléctrico radial es paralelo a estas extremas, y entonces $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$. Sobre la parte cilíndrica de la superficie tenemos que $\vec{E} \cdot \vec{n} = E_{\perp} = E$ en todas las partes. Si λ fuera negativa, tendríamos que $\vec{E} \cdot \vec{n} = E_{\perp} = -E$ en todas partes. El área de la superficie cilíndrica es $2\pi r \cdot L$.

El flujo total Φ_E a través de la superficie gaussiana, es $E A = 2\pi r L E$. La carga total encerrada es $Q_{\text{enc}} = \lambda L$, y así, a partir de la ley de Gauss:

$$\Phi_E = 2\pi r L E = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r} \quad (\text{campo de una línea infinita de carga})$$

Si λ es negativa, $\vec{E}$ estaría dirigido radialmente hacia el interior, y en la expresión anterior de E , λ se debería interpretar como el valor absoluto de la carga por unidad de longitud.

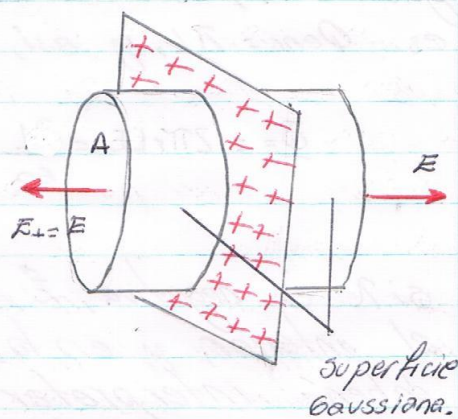
Evaluar: Si el alambre es corto, se pierden las propiedades de simetría del conductor, y E no sería uniforme sobre la superficie gaussiana cilíndrica. La ley de Gauss no podría usarse para obtener el Φ ; debemos resolver el problema por el camino empleado en el ejemplo 21.10 capítulo 21.5.

Ejemplo: Campo eléctrico de una lámina plana infinita de carga.

Inventar el campo eléctrico que genera una lámina delgada, plana e infinita, en la que hay una carga positiva por unidad de área σ .

Identificar y Plantear: El campo eléctrico $\vec{E}$ de una lámina infinita, cargada uniformemente es normal a la lámina y su magnitud es independiente de la distancia de la lámina. Para aprovechar las propiedades de simetría, se usa una superficie gaussiana cilíndrica con extremos de área A y con su eje perpendicular a la lámina cargada.

Ejecutar: el flujo a través de la parte cilíndrica de la superficie gaussiana es cero porque $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ en cualquier parte. El flujo a través de cada cara de la superficie es $+E \cdot A$ porque $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$ en todas partes, de ahí que el flujo total a través de ambas caras (y, por lo tanto, el flujo total Φ_E a través de la superficie gaussiana) es $2EA$. La carga total encerrada es $Q_{enc} = \sigma A$ y por la ley de Gauss:



$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad y \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \rightarrow \text{campo de una lámina infinita de carga.}$$

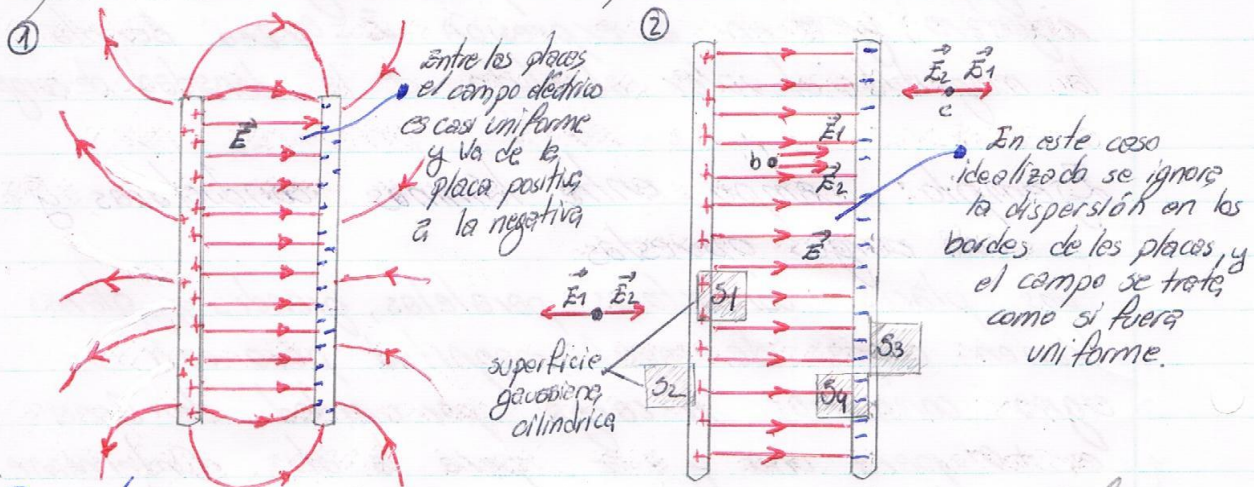
Si σ es negativa, $\vec{E}$ está dirigido hacia la lámina, el flujo a través de la superficie gaussiana es negativo, y σ en la expresión $\vec{E} = \sigma / 2\epsilon_0$ denota la magnitud, el valor absoluto de la densidad de carga.

Ejemplo: Campo entre láminas conductoras y con cargas opuestas

Das placas conductoras paralelas, grandes y planas tienen cargas de igual magnitud pero con signo contrario; la carga por unidad de área es $+\sigma$ para una y $-\sigma$ para la otra. Determine el campo eléctrico en la región entre las placas.

Identificar y Plantear: la figura describe el campo. Puesto que las cargas opuestas se atraen, la mayor parte de la carga se acumula en las caras opuestas de las placas. Una pequeña cantidad de carga reside en las superficies exteriores de las placas, y en sus extremos hay alguna dispersión del campo. Si las placas son muy grandes en comparación con la distancia que las separa, la cantidad de carga en las superficies exteriores se vuelve despreciable por pequeña y la dispersión se ignora excepto cerca de los bordes. En este caso se puede suponer que el campo es uniforme en la región interior entre las placas, como se ilustra en la figura 2, y que las cargas estén distribuidas de manera uniforme en la superficie opuesta. Para aprovechar esta simetría se utilizan las superficies gaussianas sombreadas S_1 , S_2 , S_3 y S_4 , que son cilindros con

caras planas de área A , con una carga de cada superficie dentro de una placa.



Ejecutar: El extremo de la izquierda de la superficie S_1 está dentro de la placa 1 positiva. Como en condiciones electrostáticas el campo dentro del volumen de cualquier sólido conductor es igual a cero, no hay flujo eléctrico a través de ese extremo. El campo eléctrico entre las placas es perpendicular a la cara derecha, por lo que en esa cara, E_1 es igual a E y el flujo es $E \cdot A$; éste es positivo porque $\vec{E}$ está dirigido hacia afuera de la superficie gaussiana. A través de las paredes laterales del cilindro no hay flujo, pues son paralelos a $\vec{E}$. Así que el flujo total en la ley de Gauss es $E \cdot A$. La carga neta encerrada por el cilindro es $\sigma \cdot A$, por lo que la ecuación da:

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{campo entre placas conductoras con cargas opuestas})$$

El campo es uniforme y perpendicular a la placa, y su magnitud es independiente de la distancia desde cualquiera de las placas. Este resultado es el mismo que la superficie S_4 ; además, las superficies S_2 y S_3 pueden utilizarse para demostrar que $E=0$ a la izquierda de la placa 1 y a la derecha placa 2.

Evaluar:

Las campos generados por las dos láminas cargadas (una en cada placa) son E_1 y E_2 ; del ejemplo anterior, se sabe que ambas tienen magnitud $\sigma/2\epsilon_0$. El campo eléctrico total en cualquier punto es la suma vectorial $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. En los puntos a y c en la figura 2, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen direcciones opuestas y su resultante es igual a cero. En el punto b, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma dirección; su resultante tiene magnitud $E = \sigma/\epsilon_0$ como se encontró antes utilizando la ley de Gauss.

Ejemplo: Campo de una esfera con carga uniforme

Una carga eléctrica positiva Q está distribuida de manera uniforme en todo el volumen de la esfera aislante con radio R . Encuentre la magnitud del campo eléctrico en el punto P a una distancia r del centro de la esfera.

Identificar y Plantear: Como ya se vio, este es un sistema con simetría esférica. Para emplear la simetría esférica, se elige como superficie gaussiana una esfera con radio r , concéntrica con la distribución de la carga.

Pregunta: Por simetría, la dirección de $\vec{E}$ es radial en todos los puntos de la superficie gaussiana, por lo que $E_{\perp} = E$ y la magnitud del campo E tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie.

Así, el flujo eléctrico total a través de la superficie $A = 4\pi r^2$ es decir, $\Phi_E = 4\pi r^2 E$.

La cantidad de carga encerrada por la superficie gaussiana depende del radio r . Para obtener E dentro de la esfera, se elige $r < R$. La densidad volumétrica de carga ρ es la carga Q dividida entre el volumen total de la esfera cargada de radio R :

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

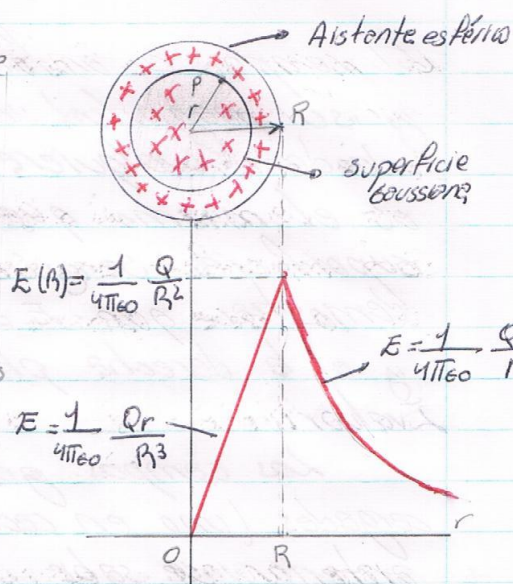
El volumen encerrado V_{enc} por la superficie gaussiana es $\frac{4}{3}\pi r^3$, por lo que la carga total Q_{enc} contenida por la superficie es:

$$Q_{enc} = \rho V_{enc} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3} \right) \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) = \frac{Q r^3}{R^3}$$

Así la ley de Gauss se convierte en:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^3}{R^3} \quad \text{o bien}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qr}{R^3} \quad (\text{campo dentro de una esfera cargada uniformemente.})$$



la magnitud del campo es proporcional a la distancia r que hay entre el punto del campo y el centro de la esfera.

Para calcular E afuera de la esfera se toma $r > R$. Esta superficie encierra la esfera cargada completa, por lo que $Q_{enc} = Q$, y la ley de Gauss da:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{o bien} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (\text{campo afuera de una esfera cargada uniformemente.})$$

Para cualquier cuerpo cargado esféricamente simétrico, el campo eléctrico en su exterior varía de acuerdo con $1/r^2$, como si toda la carga estuviera concentrada en el centro. Si la carga es negativa, $\vec{E}$ va radialmente hacia adentro y en las expresiones de E , Q se interpreta como el valor absoluto de la carga.

Evaluar:

Observe que si se establece que $r = R$ en cualquiera de las expresiones de E , se obtiene el mismo resultado $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ para la magnitud del campo en la superficie de la esfera. Esto se debe a que la magnitud de E es una función continua de r . En contraste, en la esfera conductora del ejemplo anterior, la magnitud del campo eléctrico es discontinua en $r = R$ (salta de $E = 0$ appena dentro de la esfera a $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ justo afuera de la esfera).

Ejemplo: Carga en una esfera hueca.

Una esfera hueca de pared delgada y radio de $0,25\text{ m}$ tiene una cantidad desconocida de carga distribuida de manera uniforme en su superficie. A una distancia de $0,300\text{ m}$ desde el centro de la esfera, el campo eléctrico apunta radialmente hacia adentro de la esfera y su magnitud es de $1,80 \times 10^2\text{ N/C}$. ¿Cuánta carga hay en la esfera?

Identificar y Plantear: La distribución de carga tiene simetría esférica, se deduce que el campo eléctrico es radial en todo lugar, y su magnitud sólo depende de r desde el centro de la esfera. Se utiliza una superficie esférica gaussiana que es concéntrica con la distribución de carga y tiene radio $r = 0,300\text{ m}$. Nuestra incógnita es $Q_{\text{enc}} = ?$

Ejecutar: La distribución de carga es la misma que si la carga estuviera sobre la superficie de una esfera conductora de $0,250\text{ m}$ de radio. Observe que el campo eléctrico está dirigido hacia la esfera, por lo que q debe ser negativa. Además como el campo eléctrico se dirige hacia la superficie gaussiana $\vec{E}_\perp = -\vec{E}$ y $\Phi_E = \oint \vec{E}_\perp dA = -E(4\pi r^2)$. Según la ley de Gauss, el flujo es igual a la carga q en la esfera (toda ella encerrada por la superficie de Gauss) dividida entre ϵ_0 . Al despejar q se obtiene lo siguiente:

$$q = -E(4\pi\epsilon_0 r^2) = -(1.80 \times 10^2 \text{ N/C})(4\pi)(8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.300 \text{ m})^2 = -8.01 \times 10^{-10} \text{ C} = -0.801 \text{ nC}$$

Evaluar: Para determinar la carga, se tiene que conocer el campo eléctrico en todos los puntos de la superficie gaussiana, para poder calcular el flujo. Aquí esto fue posible porque la distribución de carga es muy simétrica.

Evalúe su comprensión: Se coloca una cantidad conocida de carga Q en un conductor de forma irregular. Si se conoce el tamaño y la forma del conductor, ¿es posible emplear la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en una posición arbitraria fuera del conductor?

Respuesta: No. Tal vez usted estuviera tentado a dibujar una superficie gaussiana que fuera una versión grande del conductor, con la misma forma y colocada de manera que lo encerrara por completo. Si bien se conoce el flujo a través de esta superficie gaussiana (según la ley de Gauss, es $\Phi_E = Q/\epsilon_0$), la dirección del campo eléctrico no necesita ser perpendicular a la superficie y tampoco es necesario que la magnitud del campo sea la misma en todos los puntos de la superficie.

No es posible realizar la integral de flujo $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$, por lo que no se puede calcular el campo eléctrico. La ley de Gauss es útil para obtener el campo eléctrico sólo cuando la distribución de carga es muy simétrica.

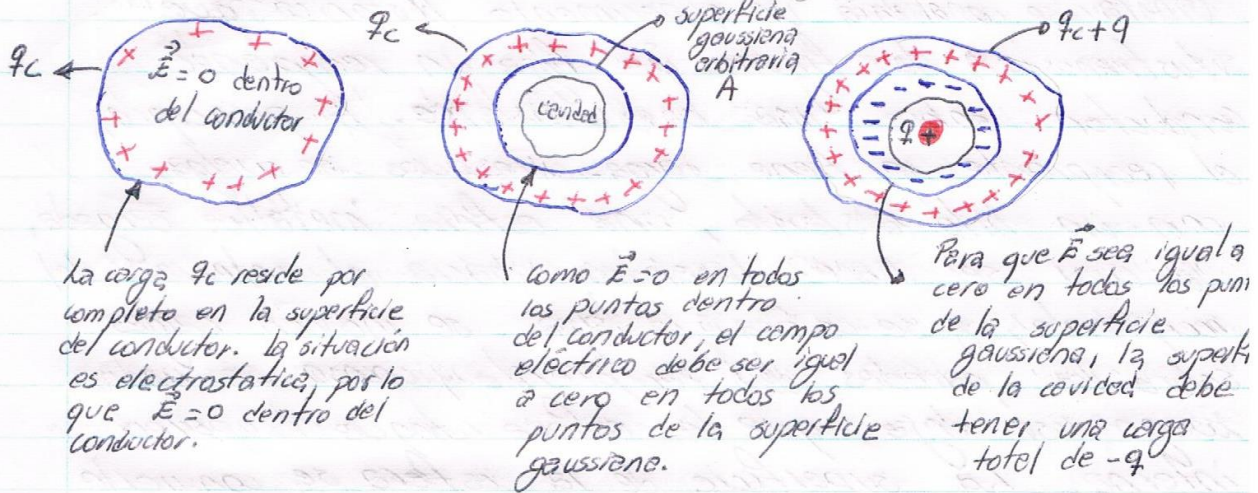
Carga en conductores

Hemos aprendido que una situación electrostática (en la que no hay movimiento neto de carga), el campo eléctrico en cada punto dentro de un conductor es igual a cero, y que el exceso de carga en un conductor sólido se localiza por completo en su superficie. Pero, ¿qué pasa si en el conductor hay una cavidad? Si no hay carga dentro de la cavidad se puede utilizar una superficie gaussiana con A para demostrar que la carga neta en la superficie de la cavidad debe ser igual a cero, ya que $\vec{E} = 0$ en todo lugar de la superficie gaussiana.

Suponga que se coloca un cuerpo pequeño con carga $-q$ dentro de una cavidad en el interior de un conductor. El conductor está descargado y aislado de la carga $-q$. Otra vez, $\vec{E} = 0$ en todos los puntos de la superficie A , por lo que según la ley de Gauss la carga total dentro esta superficie debe ser igual a cero. Por lo tanto de haber un carga $-q$ distribuida sobre la superficie de la cavidad, enviada ahí por la carga $-q$ en el interior de la cavidad, la carga total en el conductor debe ser igual a cero, por lo que debe haber una carga $+q$ ya sea en su superficie exterior o dentro del material.

Se ha demostrado que en una situación electrostática no puede haber ninguna carga excedente dentro del material de un conductor. Así se concluye que la carga $+q$ debe estar en la superficie externa. Con el mismo razonamiento, si el conductor tuviera originalmente un carga q_c , entonces

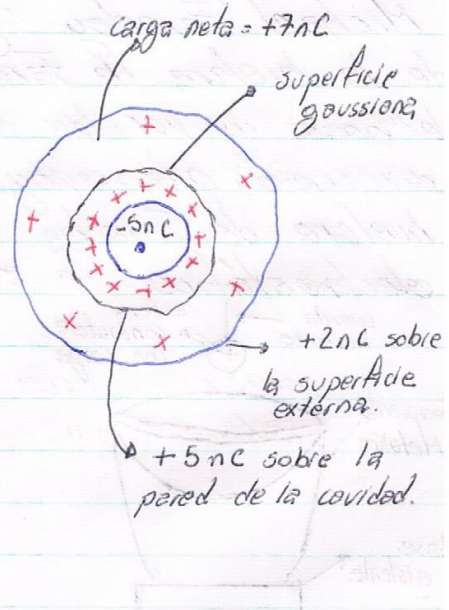
la carga total en la superficie exterior debe ser $q_c + q$ después de que se insertó la carga q en la cavidad.



Ejemplo: Conductor con una cavidad.

Un conductor sólido con una cavidad tiene una carga total $+7 \text{ nC}$. Dentro de la cavidad, aislante del conductor, hay una carga puntual de -5 nC . ¿Cuánta carga hay en cada superficie (interna y externa) del conductor?

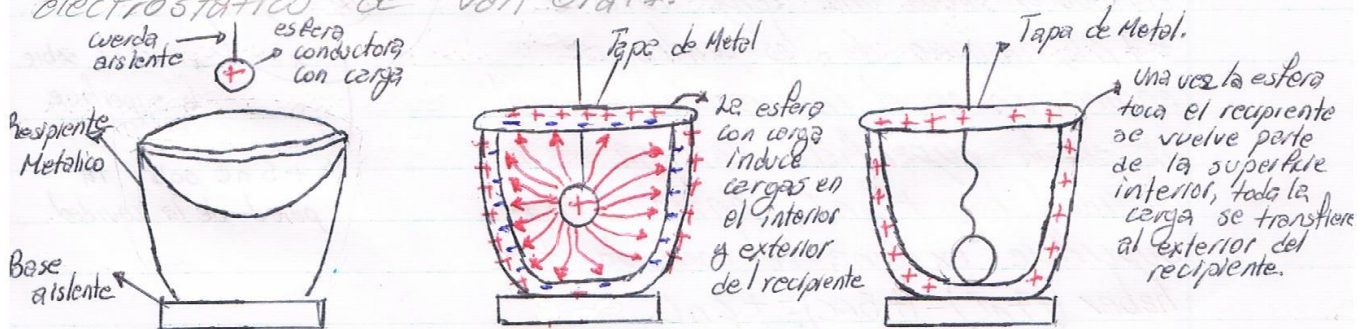
Solución: La figura ilustra la situación. Si la carga en la cavidad es $q = -5 \text{ nC}$, la carga en la superficie de la cavidad interna debe ser $-q = -(-5 \text{ nC}) = +5 \text{ nC}$. El conductor lleva una carga total de $+7 \text{ nC}$, ninguno de los cuales se encuentran en el interior del material. Si en la superficie interna de la cavidad hay $+5 \text{ nC}$, entonces en la superficie externa del conductor debe haber $(+7 \text{ nC}) - (+5 \text{ nC}) = +2 \text{ nC}$.



Prueba experimental de la ley de Gauss.

Ahora se analizará un experimento histórico, que ilustran en la figura. Se fija un recipiente conductor sobre una base aislante. A principio, el recipiente no tiene carga. Después se cuelga, con un hilo aislante, una esfera metálica cargada, la cual se hace descender hacia el interior del recipiente, y se coloca la tapa. Se inducen cargas sobre las paredes del recipiente, como se indica. Luego se deja que la esfera toque la pared interna. La superficie de la esfera se convierte en parte de la cavidad. Si la ley de Gauss es correcta, la carga neta en la superficie de la cavidad debe ser igual a cero. La esfera debe perder su carga. Por último se extrae la esfera y se constata que en efecto, perdió toda su carga.

Este experimento se realizó en el siglo XIX por Michael Faraday y se conoce como el experimento de la jaula de Faraday. El resultado confirma la ley de Gauss y por lo tanto la ley de Coulomb. El mismo principio que subyace en el experimento de la jaula de Faraday es el que se utiliza en el generador electrostático de Van Graaff.



Campo en la superficie de un conductor.

Por último, observe que hay una relación directa entre el campo $\vec{E}$ en un punto justo afuera de cualquier conductor y la densidad superficial de carga σ en ese punto. En general, σ varía de un punto a otro de la superficie. La dirección de $\vec{E}$ siempre es perpendicular a la superficie.

Para encontrar la relación entre σ en cualquier punto de la superficie y la componente perpendicular del campo eléctrico en ese punto, se construye una superficie gaussiana en forma de un pequeño cilindro. La cara de uno de los extremos, con área igual a A , queda dentro del conductor y la otra queda afuera. El campo eléctrico es igual a cero en todos los puntos del conductor. Fuera de éste, la componente de $\vec{E}$ perpendicular a las paredes envolvente del cilindro es igual a cero, y sobre la cara de los extremos la componente perpendicular es igual a $E_{\perp}$. (Si σ es positiva, el campo eléctrico apunta hacia fuera del conductor y $E_{\perp}$ es positiva; si σ es negativa, el campo eléctrico apunta hacia el interior y $E_{\perp}$ es negativa.) Así el flujo total a través de la superficie es $E_{\perp}A$. La carga encerrada dentro de la superficie gaussiana es σA , por lo que a partir de la ley de Gauss, $E_{\perp}A = (\sigma A)/\epsilon_0$ y:

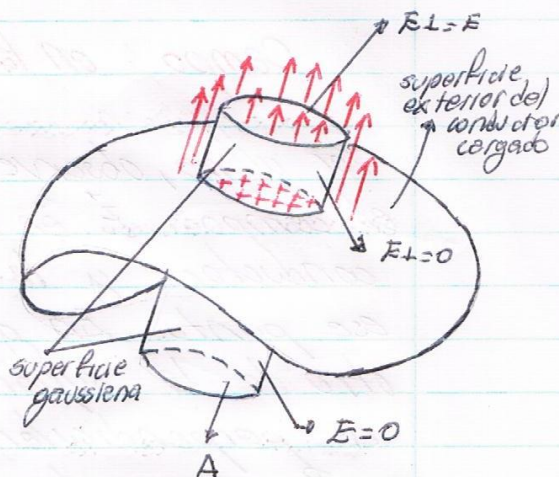
$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

densidad superficial de carga
constante eléctrica

Campo eléctrico en la superficie conductora, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie.

Esto coincide con el resultado para el campo en la superficie de una lámina conductora cargada.

Se demostró que la magnitud del campo entre dos placas conductoras infinitas con cargas opuestas también es igual a σ/ϵ_0 . En este caso, la magnitud del campo es la misma en todas las distancias a partir de las placas, pero en todos los demás casos disminuye conforme aumenta la distancia a la superficie.



Ejemplo: Campo en la superficie de una esfera conductora.

Compruebe la ecuación $E_L = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ para una esfera conductora de radio R y carga total q .

Solución: El campo eléctrico inmediatamente afuera de la superficie es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

La densidad superficial de carga es uniforme e igual a q dividido el área superficial de la esfera:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Al comparar estas dos expresiones se observa que $E = \sigma/\epsilon_0$, como se planteó en la ecuación $E_L = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Ejemplo: Campo eléctrico de la tierra

La Tierra (un conductor) tiene una carga eléctrica neta. El campo eléctrico resultante cerca de la superficie puede medirse con instrumentos electrónicos sensibles; su valor medio es de alrededor de 150 N/C , dirigido hacia el centro de la tierra. a) ¿Cuál es la densidad superficial de carga correspondiente? b) ¿Cuál es la carga superficial total de la Tierra?

Identificar y Plantear: Se da la magnitud del campo eléctrico en la superficie de la Tierra conductora. Se puede calcular la densidad superficial σ usando la ecuación $E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. La carga total Q en la superficie de la tierra es el producto de σ por el área de la superficie terrestre.

Ejecutar: a) De la dirección del campo se sabe que σ es negativa (lo que corresponde a $\vec{E}$ dirigido hacia la superficie, por lo que E_1 es negativa). De acuerdo con la ecuación:

$$\begin{aligned}\sigma &= \epsilon_0 E_1 = (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(-150 \text{ N/C}) = \\ &= -1.33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2 = -1.33 \text{ nC/m}^2\end{aligned}$$

b) El área de la superficie de la Tierra es $4\pi R_E^2$, donde $R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$ es el radio terrestre. La carga total Q es el producto $4\pi R_E^2 \sigma$, o bien:

$$Q = 4\pi (6.38 \times 10^6 \text{ m})^2 (-1.33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2) = -6.8 \times 10^5 \text{ C} = -680 \text{ kC}$$

Evaluar: El resultado del inciso b) se puede comprobar al despejar Q , se encuentra que:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 R^2 E_{\perp} = \frac{1}{9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2} (6.38 \times 10^6 \text{ m})(-150 \text{ N/C})$$
$$= -6.8 \times 10^6 \text{ C.}$$

Evalúe su comprensión: Una esfera conductora hueca carece de carga neta. En el centro de la cavidad esférica dentro de la esfera hay una carga puntual positiva q . Se conecta un alambre conductor entre el exterior de la esfera y el terreno.
¿Se medirá un campo eléctrico fuera de la esfera?
Respuesta: No.

Antes de conectar el alambre con la esfera, la presencia de la carga puntual indicaría una carga $-q$ en la superficie interior de la esfera hueca y una carga q en la superficie exterior (La carga neta en la esfera es igual a cero). Habrá un campo eléctrico fuera de la esfera que se debe a la carga en la superficie exterior. Sin embargo, una vez que el alambre conductor toque la esfera, los electrones fluirán de la tierra a la superficie exterior de la esfera para neutralizar la carga ahí presente. Como resultado, la esfera no tendrá carga en su superficie externa, ni tampoco campo eléctrico en el exterior.

Campo eléctrico de varias distribuciones simétricas de carga:

Campos generados por varias distribuciones simétricas de cargas. En la tabla, q , Q , λ y σ se refieren a las magnitudes de las cantidades.

Distribución de carga	Punto en el campo eléctrico.	Magnitud del campo eléctrico.
Una sola carga puntual q	Distancia r desde q	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
Carga q en la superficie de una esfera conductora de radio R	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = 0$
Alambre infinito, carga por unidad de longitud λ	Distancia r desde el alambre	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$
Cilindro conductor infinito con radio R , carga por unidad de longitud λ	Cilindro exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$
	Cilindro interior $r < R$	$E = 0$
Esfera aislante sólida con radio R , carga Q distribuida de manera uniforme en todo el volumen.	Esfera exterior $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
	Esfera interior $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3}$
Lámina infinita con carga uniforme por unidad de área σ	cualquier punto	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Das placas conductoras con cargas opuestas y densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$	cualquier punto	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
Conductor cargado	inmediatamente afuera del conductor	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$