

Infografía y ejercicios resueltos, capítulo 24 "Capacitancia y dieléctricos"

Libro: Sears y Zemansky- FÍSICA

UNIVERSITARIA CON FÍSICA MODERNA

tomo 2- YOUNG Y FREEDMAN.

Alumno: Jonatan Márquez.

Ejemplo 24.1: Tamaño de un capacitor de 1F

Las placas paralelas de un capacitor de 1.0F están separadas 1.0mm ¿Cuál es el área de cada placa?

Identificar y Plantear: Este problema utiliza la relación entre la capacitancia C , la separación d de las placas y el área A de cada placa (la incógnita) para un capacitor de placas paralelas. Se despeja A de la ecuación:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\text{F})(1.0 \times 10^{-3}\text{m})}{8.85 \times 10^{-12}\text{F/m}} = 1.1 \times 10^8\text{m}^2$$

Evaluar: Esto corresponde a un cuadrado ¡de alrededor de 10km por lado! El volumen de este capacitor sería por lo menos $Ad = 1.1 \times 10^5\text{m}^3$, equivalente a un cubo de 50m por lado aproximadamente. Es posible fabricar capacitores de 1F que miden unas cuantas centímetros por lado. La clave está en que haya una sustancia adecuada entre las placas en lugar de vacío, de modo que (entre otras cuestiones) la separación d de las placas se puedan reducir en gran medida.

Ejemplo 24.2: Propiedades de un capacitor de placas Paralelas.

Las placas paralelas de un capacitor con vacío están separadas una distancia de 5.00 mm y tienen 2.00 m^2 de área. Se aplica una diferencia de potencial de 10.0 kV a través del capacitor. Calcule a) la capacitancia b) la carga en cada placa y c) la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre ellas.

Identificar y Plantear:

Se conoce el área A de una placa, la separación d entre las placas y la diferencia de potencial $V_{ab} = 1.00 \times 10^4 \text{ V}$ para este capacitor de placas paralelas. Las incógnitas son la capacitancia C , la carga Q en cada placa y la magnitud del campo eléctrico E . Se utilizarán las siguientes ecuaciones:

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_{ab}}$$

$$\Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Se emplea $E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ para determinar E .

$$\begin{aligned} \text{a) } C &= \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}) \frac{(2.00 \text{ m}^2)}{5.00 \times 10^{-3} \text{ m}} = 3.54 \times 10^{-9} \text{ F} \\ &= 0.00354 \text{ nF} \end{aligned}$$

b) La carga en el capacitor es:

$$\begin{aligned} Q &= CV_{ab} = (3.54 \times 10^{-9} \text{ C/V})(1.00 \times 10^4 \text{ V}) \\ &= 3.54 \times 10^{-5} \text{ C} = 35.4 \text{ nC} \end{aligned}$$

La placa con mayor potencial tiene una carga de $+35.4 \text{ nC}$, y la otra tiene una carga de -35.4 nC .

d) La magnitud del campo eléctrico es:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3.54 \times 10^{-5} \text{ C}}{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.00 \text{ m}^2)} \\ = 2.00 \times 10^6 \text{ N/C}$$

Evaluar: También podemos calcular E , recordando que el campo eléctrico tiene igual magnitud que gradiente de potencial. Como el campo entre las placas es uniforme

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{4.00 \times 10^4 \text{ V}}{0.02 \text{ m}} = 2.00 \times 10^6 \text{ V/m}$$

(Recuerde que $1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$)

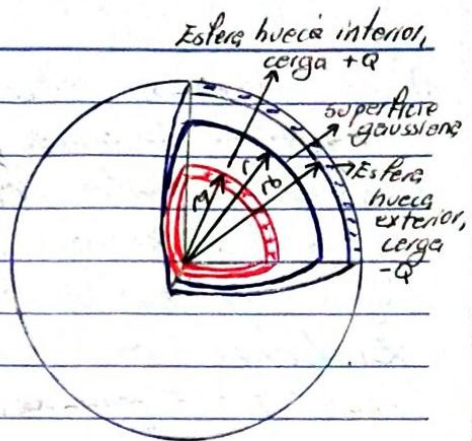
Ejemplo 24.3: Capacitores esféricos

Dos esferas huecas conductoras y concéntricas están separadas por vacío. La esfera hueca interior tiene una carga total $+Q$ y radio exterior r_a , y la esfera hueca exterior tiene carga $-Q$ y radio interior r_b . Determine la capacitancia de este capacitor esférico.

Identificar y Plantear: Por definición, la capacitancia C es la magnitud Q de la carga en cualquiera de las esferas. Primero calculemos V_{ab} y, luego usaremos la ecuación $C = Q/V_{ab}$ para determinar la capacitancia.

Ejecutar: Usando una superficie gaussiana como la mostrada en la figura, calculemos que la carga en una esfera conductora produce un campo igual a cero dentro de la esfera, de modo que la esfera exterior no contribuya

al campo entre las esferas. Por lo tanto, el campo eléctrico y el potencial eléctrico entre las esferas huecas son iguales a los que hay en la parte exterior de una esfera cargada con carga $+Q$. El potencial en cualquier punto entre las esferas es $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$. Por lo



tanto, el potencial del conductor interior (positivo) en $r = r_a$ con respecto al del conductor exterior (negativo) en $r = r_b$ es:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

Entonces la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

como ejemplo, si $r_a = 9.5 \text{ cm}$ y $r_b = 10.5 \text{ cm}$,

$$C = 4\pi (8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}) \frac{(0.095 \text{ m})(0.105 \text{ m})}{0.010 \text{ m}}$$

$$= 1.1 \times 10^{-10} \text{ F} = 110 \text{ pF}$$

Evaluar: Podemos relacionar la expresión de C con la de un capacitor de placas paralelas. La cantidad $4\pi\epsilon_0 r_a r_b$ es intermedia entre las áreas $4\pi r_a^2$ y $4\pi r_b^2$ de las dos esferas; de hecho, es la medida geométrica de las dos áreas, lo que se denota como A_{gm} . La distancia entre las esferas es $d = r_b - r_a$, de manera que se puede escribir $C = 4\pi\epsilon_0 r_a r_b / (r_b - r_a) = \epsilon_0 A_{gm} / d$. Esto tiene la misma forma para placas paralelas: $C = \epsilon_0 A / d$. Si la distancia entre las esferas es muy pequeña en comparación con sus radios, la capacitancia es la misma que para placas paralelas con las mismas áreas y separación.

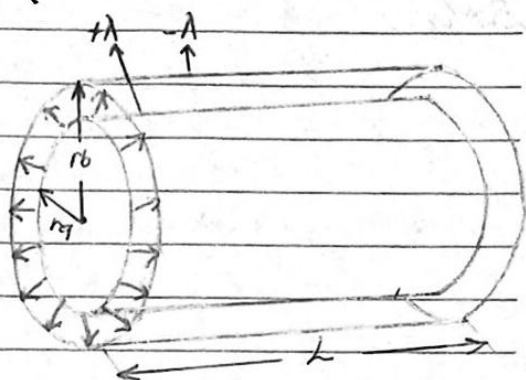
Ejemplo 24.4: Capacitor cilíndrico

Dos conductores cilíndricos coaxiales y largos estén separados por un vacío. El cilindro interior tiene un radio r_a y densidad lineal de carga $+\lambda$. El cilindro exterior tiene un radio interior r_b y densidad de carga lineal $-\lambda$. Obtenga la capacitancia por unidad de longitud para este capacitor.

Identificar y Plantear:

Se utiliza la definición de capacitancia, $C = Q/V_{ab}$. Usamos también el resultado. Usamos también el resultado del ejemplo 23.10 para obtener la diferencia de potencial V_{ab} entre los cilindros, y calcular la carga Q en la longitud L de los cilindros a partir de la densidad lineal de carga. Luego se obtiene la capacitancia C correspondiente con la ecuación (24.1). La incógnita es la capacitancia dividido entre L .

Ejecutor: Como en el ejemplo anterior, el potencial V entre los cilindros se ve afectado por la presencia del cilindro exterior con carga. Por consiguiente, el resultado del ejemplo 23.10 para el potencial a fuera de un cilindro exterior con carga también es válido en este ejemplo para el potencial en el espacio entre los cilindros:



$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

donde r_0 es el radio fijo arbitrario, en el que $V=0$. Se toma el radio $r_0 = r_b$, el radio de la superficie interior del cilindro exterior. Entonces, el potencial en la superficie exterior de cilindro interior (donde $r=r_a$) es igual al potencial V_{ab} del cilindro interior a (positivo) con respecto al cilindro exterior o (negativo).

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

Si λ es positiva como en la figura, entonces V_{ab} también es positivo: el cilindro interior está a un potencial más elevado que el exterior.

La carga total Q en una longitud L es $Q = \lambda L$, por lo que, a partir de la ecuación (24.1), la capacitancia C de una longitud L es:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)}$$

La capacitancia por unidad de longitud es:

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_b/r_a)}$$

Si se usa litigio $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 8.85 \text{ pF/m}$, se obtiene: $\frac{C}{L} = \frac{55.6 \text{ pF/m}}{\ln(r_b/r_a)}$

Evaluar: La capacitancia de los cilindros coaxiales está determinada en su totalidad por sus dimensiones, tal como sucede en el caso de las placas paralelas y los capacitores esféricos. Los cables coaxiales están fabricados de este modo, pero con un material aislante en lugar de vacío entre los conductores. El cable típico para conectar un televisor a la alimentación, tiene una capacitancia por unidad de longitud de 69 pF/m .

Evalúe su comprensión: Un capacitor tiene vacío en el espacio entre los conductores. Si se duplica la cantidad de carga en cada conductor, ¿qué ocurre con la capacitancia? i. aumenta ii. disminuye; iii. permanece igual; iv. la respuesta depende del tamaño o la forma de los conductores.

Respuesta: iii. La capacitancia no depende del valor de la carga Q . La duplicación del valor de Q hace que la diferencia de potencial V_{ab} se duplique, por lo que la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ permanece sin cambio. Estos enunciados son verdaderos sin importar la geometría del capacitor.

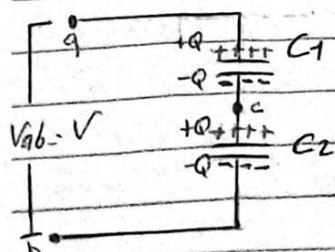
Ejemplo 24.6: Capacitores en serie y en paralelo.

En los siguientes, sean $C_1 = 6.0 \mu\text{F}$, $C_2 = 3.0 \mu\text{F}$ y $V_{ab} = 16\text{V}$. Determine la capacitancia y la carga equivalentes, y la diferencia de potencial para cada capacitor cuando los capacitores se conectan a) en serie y b) en paralelo.

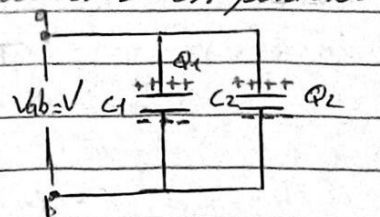
Identificar y plantear: En ambos incisos de este ejemplo una incógnita es la capacitancia equivalente C_{eq} , que para la combinación en serie del inciso a) está dada por la ecuación: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$; y para la

combinación en paralelo inciso b), por la ecuación $C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots$. En cada inciso se obtiene la carga y la diferencia de potencial utilizando la definición de capacitancia.

capacitores en serie:



capacitores en paralelo:



Ejercitar: a) De acuerdo con la ecuación, para una combinación en serie;

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6.0 \mu F} + \frac{1}{3.0 \mu F}$$

$$C_{eq} = 2.0 \mu F$$

La carga Q en cada capacitor en serie es igual a la carga en un capacitor equivalente:

$$Q = C_{eq} V = (2.0 \mu F)(18V) = 36 \mu C$$

La diferencia de potencial a través de cada capacitor es inversamente proporcional a su capacitancia:

$$V_{a1} = V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{36 \mu C}{6.0 \mu F} = 6.0V$$

$$V_{a2} = V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{36 \mu C}{3.0 \mu F} = 12.0V$$

b) Según la ecuación, para una combinación en paralelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6.0 \mu F + 3.0 \mu F = 9.0 \mu F$$

La diferencia de potencial a través de cada uno de los capacitores es la misma que la del capacitor equivalente, 18V. La carga en cada capacitor es directamente proporcional a su capacitancia:

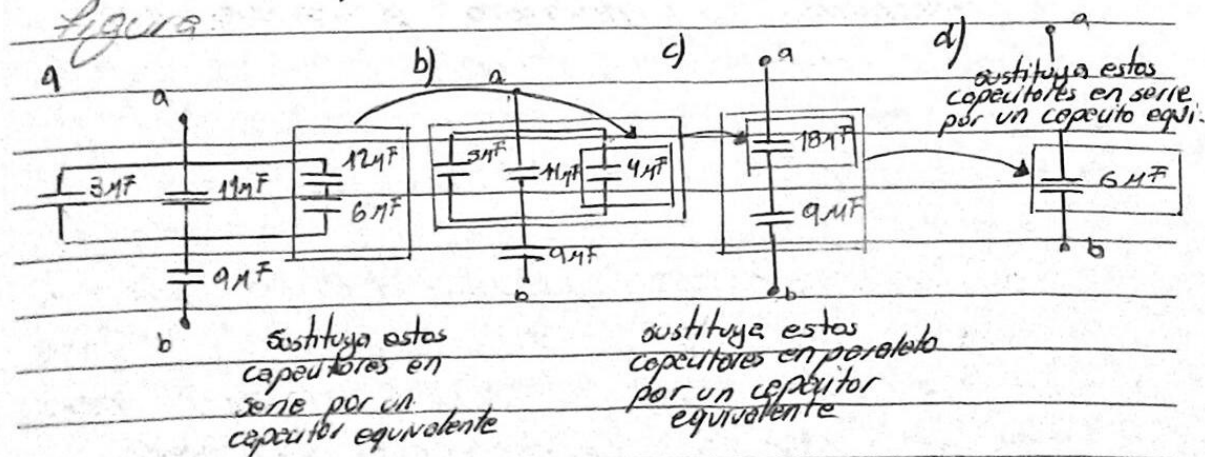
$$Q_1 = C_1 V = (6.0 \mu F)(18V) = 108 \mu C$$

$$Q_2 = C_2 V = (3.0 \mu F)(18V) = 54 \mu C$$

Evaluar: Como se esperaba, la capacitancia equivalente C_{eq} para la combinación en serie del inciso a) es menor que C_1 o C_2 , en tanto que para la combinación en paralelo del inciso b), es mayor que C_1 o C_2 . Para dos capacitores en serie, como en el inciso a), la carga es la misma en cualquier capacitor y la diferencia de potencial más grande cae a través de capacitor con la menor capacitancia. Además, la suma de las diferencias de potencial a través de los capacitores individuales en serie es igual a la diferencia de potencial del capacitor equivalente: $V_{ac} + V_{cb} = 18V$. En contraste, para dos capacitores en paralelo, como en el inciso b), cada capacitor tiene la misma diferencia de potencial y la carga más grande está en el capacitor con mayor capacitancia.

Ejemplo 24.6: Red de capacitores

Obtenga la capacitancia equivalente de la red de cinco capacitores que se ilustra en la figura.



Identificar y plantear: Los capacitores no están conectados todos en serie ni todos en paralelo. Sin embargo, podemos identificar partes del arreglo que sí están en serie o en paralelo. Combinaremos éstas como se describió en la estrategia para resolver problemas para calcular la capacitancia equivalente neta, usando las ecuaciones para conexiones en serie y en paralelo.

Ejecutar: La leyenda de la figura describe el procedimiento. Primero se usa la ecuación para combinación en serie y se sustituye por su capacitancia equivalente C' :

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{12\text{MF}} + \frac{1}{6\text{MF}}$$

$$C' = 4\text{MF}$$

Lo cual da la combinación equivalente que se ilustra en la figura parte b. Ahora vemos tres capacitores en paralelo, y usamos la ecuación para combinación en paralelo y sustituimos para hallar un capacitor equivalente C''

$$C'' = 3\text{MF} + 1\text{MF} + 4\text{MF} = 8\text{MF}$$

que da la combinación equivalente de la parte c de la figura, la cual tiene dos capacitores en serie. Se usa la ecuación para conexión en serie para sustituirlas por su capacitancia equivalente C_{eq} , es decir, nuestra incógnita

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{18\mu F} + \frac{1}{9\mu F}$$

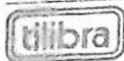
$$C_{eq} = 6\mu F$$

Evaluar: si la diferencia de potencial a través de toda la red de la figura es $V_{ab} = 9.0V$, la carga neta de la red es $Q = C_{eq} V_{ab} = (6\mu F)(9.0V) = 54\mu C$.

Evalúe su comprensión: Se desea conectar un capacitor de $4\mu F$ y otro de $8\mu F$ a) ¿con qué tipo de conexión tendrá el capacitor $4\mu F$ una diferencia de potencial más grande que el de $8\mu F$? i. En serie; ii. en paralelo; iii. indistintamente, en serie o paralelo; iv. ni en serie ni en paralelo. b) ¿con qué tipo de conexión tendrá el capacitor de $4\mu F$ una carga mayor que la carga del capacitor de $8\mu F$? i. En serie; ii. en paralelo; iii. indistintamente, en serie o paralelo; iv. ni en serie ni en paralelo.

Respuestas: a) i, b) iv

En una conexión en serie, los dos capacitores tienen la misma carga Q , pero distintas diferencias de potenciales $V_{ab} = Q/C$; el capacitor con menor capacitancia C tiene mayor diferencia de potencial. En una conexión en paralelo, los dos capacitores tienen la misma diferencia de potencial V_{ab} , pero distintas cargas $Q = CV_{ab}$; el capacitor con mayor capacitancia C tiene la carga más grande. Por lo tanto, un capacitor de $4\mu F$ tendrá una



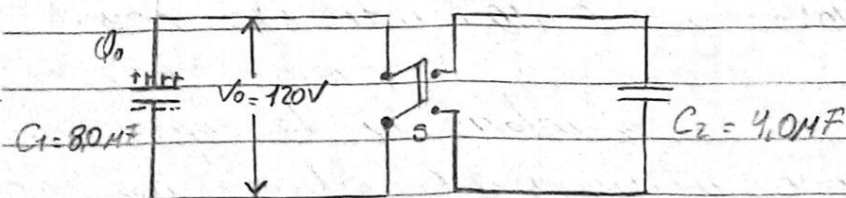
diferencia de potencial más grande que

otro capacitor de $8\text{ }\mu\text{F}$ si los dos están conectados en serie. El capacitor de $4\text{ }\mu\text{F}$ no puede tener más carga que el de $8\text{ }\mu\text{F}$ sin importar como se conecten: en una conexión en serie tendrán la misma carga, y en una en paralelo el capacitor de $8\text{ }\mu\text{F}$ tendrá más carga.

Ejemplo 24.7: Transferencia de carga y energía entre capacitores.

Se conecta un capacitor de capacitancia $C_1 = 8.0\text{ }\mu\text{F}$ a una fuente de energía, cargándolo con una diferencia de potencial $V_0 = 120\text{ V}$, desconectando luego la fuente de energía. El interruptor S está abierto.

a) ¿Cuál es la carga Q_1 en C_1 ? b) ¿Cuál es la energía almacenada en C_1 ? c) Inicialmente, el capacitor de capacitancia $C_2 = 4.0\text{ }\mu\text{F}$ está desconectado. Se cierra el interruptor S . Después de que cesa de fluir carga, ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor y cuál es la carga en cada uno? d) ¿Cuál es la energía final del sistema?



Identificar y plantear: En el inciso a) y b), la carga Q_0 y la energía almacenada U_{inicial} para el capacitor con carga C_1 se calcula con las ecuaciones:

$C = Q/V_0$ y $U = Q^2/2C = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$, respectivamente.

Después de cerrar el interruptor S, un alambre conecta las placas superiores de los dos capacitores y otro alambre conecta las placas inferiores; los capacitores ahora están conectados en paralelo.

En el inciso c) se emplean las características de la conexión en paralelo para determinar la manera en que los capacitores comparten la carga Q_0 . En el inciso d) se utiliza otra vez la ecuación $U = Q^2/2C = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$, para calcular la energía almacenada en los capacitores C_1 y C_2 ; la energía del sistema es la suma de estos valores.

Responder:

a) La carga inicial Q_0 en C_1 es:

$$Q_0 = C_1 V_0 = (8.0 \mu\text{F})(120\text{V}) = 960 \mu\text{C}$$

b) La energía almacenada inicialmente en C_1 es:

$$U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} Q_0 V_0 = \frac{1}{2} (960 \times 10^{-6} \text{C})(120\text{V}) = 0.058 \text{ J}$$

c) Cuando se cierra el interruptor, la carga positiva Q_0 se distribuye en las placas superiores de ambos capacitores, y la carga negativa $-Q_0$ se distribuye en las placas inferiores. Sean Q_1 y Q_2 las magnitudes de las cargas finales en los capacitores. La conservación de la carga requiere

que $Q_1 + Q_2 = Q_0$. La diferencia de potencial V entre las placas es igual en ambos capacitores porque están conectados en paralelo, de modo que las cargas son $Q_1 = C_1 V$ y $Q_2 = C_2 V$. Ahora existen tres ecuaciones independientes que relacionan las tres incógnitas Q_1 , Q_2 y V . Al despejarlas, tenemos:

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960 \text{ nC}}{30 \text{ nF} + 40 \text{ nF}} = 80 \text{ V}$$

$$Q_1 = 640 \text{ nC} \quad Q_2 = 320 \text{ nC}$$

d) La energía final del sistema es

$$U_{\text{final}} = \frac{1}{2} Q_1 V + \frac{1}{2} Q_2 V = \frac{1}{2} Q_0 V$$

$$= \frac{1}{2} (960 \times 10^{-9} \text{ C})(80 \text{ V}) = 0.0384 \text{ J}$$

Evaluar: La energía final es menor que la energía original; la diferencia se convirtió en energía de algún otro tipo. Los conductores se calientan un poco debido a su resistencia, y algo de energía irradia como ondas electromagnéticas.

Ejemplo 24.8: Energía del campo eléctrico

- a) ¿cuál es la magnitud requerida del campo eléctrico para almacenar 1.00 J de energía potencial eléctrica en un volumen de 1.00 m^3 en vacío?
b) Si la magnitud del campo eléctrico es 10 veces mayor, ¿cuánta energía se almacena por metro cúbico?

Identificar y plantear: Se utiliza la relación entre la magnitud E del campo eléctrico y la densidad de energía u . En el inciso a) se emplea la información dada para obtener u , y después usamos la ecuación: $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ para encontrar el E correspondiente de u . En el inciso b), esta ecuación nos dice cómo varía u en relación con E .

Ejecutar: a) La densidad deseada de energía es $u = 1.00 \text{ J/m}^3$. Entonces, de acuerdo con la ecuación:

$$E = \sqrt{\frac{2u}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00 \text{ J/m}^3)}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2}} \\ = 4.75 \times 10^5 \text{ N/C} = 4.75 \times 10^5 \text{ V/m}$$

- b) Esta ecuación indica que u es proporcional a E^2 . Si E se incrementa en un factor de 10, u aumenta en un factor de $10^2 = 100$, y la densidad es $u = 100 \text{ J/m}^3$.

Evaluar: El aire seco puede soportar un campo eléctrico de aproximadamente $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ sin experimentar la ruptura del dieléctrico. Entonces veremos que las magnitudes del campo en los aislantes prácticos llegan a ser incluso más grandes que ese valor.



Ejemplo 24.9: Dos maneras de calcular la energía almacenada en un capacitor.

El capacitor esférico descrito en el ejemplo 24.3 tiene cargas $+Q$ y $-Q$ en sus conductores interior y exterior. Calcule la energía potencial eléctrica almacenada en el capacitor a) usando la capacitancia C obtenida en el ejemplo 24.3 y b) por integración de la densidad de energía u del campo eléctrico.

Identificar y plantear:

Se puede determinar la energía U almacenada en un capacitor de dos maneras: en términos del trabajo realizado para colocar las cargas en los dos conductores, y en términos de la energía en el campo eléctrico entre los conductores. Las dos descripciones son equivalentes, por lo que deben dar el mismo resultado. En el ejemplo 24.3 se obtuvo la capacitancia C y la magnitud E del campo en el espacio entre los conductores (el campo eléctrico es cero dentro de la esfera interior y también afuera de la superficie interna de la esfera exterior, porque una superficie gaussiana de radio $r < r_a$ o $r > r_b$ encierra una carga neta igual a cero. Por lo tanto, la densidad de energía es diferente de cero sólo en el espacio entre las esferas, $r_a < r < r_b$). En el inciso a), se utilizará la ecuación: $U = Q^2/2C = 1/2 qV = 1/2 QV$ para obtener U . En el inciso b) se empleará la ecuación $u = 1/2 \epsilon_0 E^2$ con la finalidad de determinar u , la cual integraremos sobre el volumen entre las esferas para obtener U .

Ejercitor: a) A partir del ejemplo 24.3, el capacitor esférico tiene una capacitancia

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

donde r_a y r_b son los radios de las esferas conductoras interior y exterior, respectivamente. De acuerdo con la ecuación, la energía almacenada en este capacitor es:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

b). El campo eléctrico en la región $r_a < r < r_b$ entre las dos esferas conductoras tiene una magnitud $E = Q / 4\pi\epsilon_0 r^2$ la densidad de energía en esta región es:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 r^4}$$

La densidad de energía no es uniforme, sino que disminuye rápidamente al aumentar la distancia desde el centro del capacitor. Para encontrar la energía total del campo eléctrico, se integra u (energía por unidad de volumen) en la región $r_a < r < r_b$. Se divide esta región en esferas huecas de radio r , área superficial $4\pi r^2$, espesor dr y volumen $dV = 4\pi r^2 dr$. Entonces:

$$U = \int u dV = \int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 r^4} \right) 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a} \right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

Evalue: La energía potencial eléctrica puede considerarse como asociada a los ejes, como en el inciso a); o con el campo, como en el inciso b). La cantidad de energía almacenada es la misma en cualquier caso.

Evalue su comprensión: Se desea conectar un capacitor de $4\mu F$ con otro de $8\mu F$. ¿Con qué tipo de conexión tendrá el capacitor de $4\mu F$ una cantidad mayor de energía almacenada que el de $8\mu F$?

i. En serie; ii. en paralelo; iii. con cualquiera, ya sea en serie o en paralelo; iv. ni en serie ni paralelo.

Respuesta: i

Los capacitores conectados en serie tienen la misma carga Q . Para comparar la cantidad de energía almacenada, se utiliza la expresión $U = Q^2/2C$ de la ecuación (21.9); esto indica que el capacitor con la menor capacitancia ($C = 4\mu F$) tiene más energía almacenada en una combinación en serie. En contraste, los capacitores en paralelo tienen la misma diferencia de potencial V , por lo que para compararlas se emplea $U = 1/2 CV^2$. Esto demuestra que en una combinación en paralelo, el capacitor con la mayor capacitancia ($C = 8\mu F$) tiene más energía almacenada. (Si en lugar de lo anterior se hubiera usado $U = 1/2 CV^2$ para analizar la combinación en serie, se habrían tenido que explicar las distintas diferencias de potencial a través de los capacitores. En forma similar, el empleo de $U = Q^2/2C$ para estudiar la combinación en paralelo requeriría que se explicaran las diferentes cargas en los capacitores).

Ejemplo 24.10: Capacitores con y sin dieléctrico

Suponga que cada una de las placas paralelas de la figura tiene un área de $2000 \text{ cm}^2 (2.00 \times 10^{-1} \text{ m}^2)$ y están separadas $1.00 \text{ cm} (1.00 \times 10^{-2} \text{ m})$. El capacitor está conectado a una fuente de energía y se carga con una diferencia de potencial $V_0 = 3.00 \text{ kV}$; después se desconecta de la fuente de energía y se inserta entre las placas una lámina de material plástico aislante, llenando por completo el espacio entre ellas. Se observa que la diferencia de potencial disminuye a 1.00 kV y que la carga en cada placa del capacitor permanece constante. Calcule a) la capacitancia original C_0 ; b) la magnitud de la carga Q en cada placa; c) la capacitancia C después de haber insertado el dieléctrico; d) la constante K del dieléctrico; e) la permitividad ϵ del dieléctrico; f) la magnitud de la carga inducida Q_i en cada cara del dieléctrico; g) el campo eléctrico original E_0 entre las placas; y h) el campo eléctrico E después de insertar el dieléctrico.

Identificar y Plantear:

Este problema usa la mayoría de las relaciones que se han estudiado para capacitores y dieléctricos. La mayoría de las incógnitas se obtienen de diferentes maneras. Los métodos que se usan a continuación son una muestra.

Ejecutar: a) Con vacío entre las placas se usa la ecuación $C = KC_0 = K\epsilon_0 A/d = \epsilon A/d$ con K igual a 1

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}) (2.00 \times 10^{-1} \text{ m}^2)}{1.00 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

$$= 1.77 \times 10^{-10} \text{ F} = 177 \text{ pF}$$

b) A partir de la definición de ϵ_0 vacío

b) Dieléctrico

capacitancia:

$$Q_0 = C_0 V_0 = (1.77 \times 10^{-10} \text{ F})(3.00 \times 10^3 \text{ V})$$

$$= 5.31 \times 10^{-7} \text{ C} = 0.531 \mu\text{C}$$

c) Cuando se inserta el dieléctrico, Q permanece sin cambio, pero la diferencia de potencial disminuye a $V = 100 \text{ kV}$. Así, de acuerdo con la ecuación: $C = Q/V$ la nueva capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5.31 \times 10^{-7} \text{ C}}{3.00 \times 10^3 \text{ V}}$$

$$= 531 \text{ pF}$$

d) Según la ecuación $K = C/C_0$, la constante dieléctrica es:

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{531 \times 10^{-12} \text{ F}}{1.77 \times 10^{-12} \text{ F}} = \frac{531 \text{ pF}}{177 \text{ pF}} = 3.00$$

En forma alternativa, a partir de la ecuación:

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{3000 \text{ V}}{1000 \text{ V}} = 3.00$$

e) Al sustituir el valor de K del inciso d) en la ecuación:

$\epsilon = K\epsilon_0$ la permitividad es:

$$\epsilon = K\epsilon_0 = (3.00)(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)$$

$$= 2.66 \times 10^{-11} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$$

f) Multiplicando ambas lados de la ecuación: $\sigma_r = \sigma(1 - 1/K)$ por el área A de la placa, se obtiene la carga inducida $Q_r = \sigma_r A$ en términos de la carga $Q = \sigma A$ en cada placa:

$$Q_1 = Q \left(1 - \frac{1}{K}\right) = (5.31 \times 10^{-7} \text{C}) \left(1 - \frac{1}{3.00}\right)$$

$$= 3.54 \times 10^{-7}$$

2) Como el campo eléctrico entre las placas es uniforme, su magnitud es la diferencia de potencial dividida entre la separación de las placas:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000 \text{ V}}{1.00 \times 10^{-2} \text{ m}} = 3.00 \times 10^5 \text{ V/m}$$

4) Después de insertar el dieléctrico,

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000 \text{ V}}{1.00 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1.00 \times 10^5 \text{ V/m}$$

o, de acuerdo con la ecuación:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{5.31 \times 10^{-7} \text{ C}}{(2.66 \times 10^{-11} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1} \text{ m}^2)}$$

$$= 1.00 \times 10^5 \text{ V/m}$$

O bien, a partir de la siguiente ecuación

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q'}{\epsilon_0 A} = \frac{(5.31 - 3.54) \times 10^{-7} \text{ C}}{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1} \text{ m}^2)}$$

$$= 1.00 \times 10^5 \text{ V/m}$$

O, de la ecuación:

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{3.00 \times 10^5 \text{ V/m}}{3.00} = 1.00 \times 10^5 \text{ V/m}$$

Evaluar: Al insertar el dieléctrico se incrementa la capacitancia en un factor $K=3.00$, y el campo eléctrico entre las placas se reduce en un factor $1/K = 1/3.00$. Ocurre así porque se desarrollan cargas inducidas en las caras del dieléctrico de magnitud $Q(1-1/K) = Q(1-1/3.00) = 0.667Q$.

Ejemplo 24.11: Almacenamiento de energía con o sin dieléctrico.

Calcule la energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor del ejemplo 24.10, así como la densidad de energía, antes y después de haber insertado el dieléctrico.

Identificar y plantear: Consideremos ahora las ideas de la energía almacenada en un capacitor y de la densidad de energía del campo eléctrico. Se usa la ecuación: $U = Q^2/2C = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$ y la ecuación: $U = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ para calcular la densidad de energía.

Ejecutar: De acuerdo con la ecuación, las energías almacenadas U_0 y U con y sin el dieléctrico son:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} (4.77 \times 10^{-10} \text{ F}) (3000 \text{ V})^2 = 7.97 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} (6.31 \times 10^{-10} \text{ F}) (1000 \text{ V})^2 = 2.66 \times 10^{-4} \text{ J}$$

La energía final es un tercio de la energía original.

La densidad de energía con y sin dieléctrico es:

$$u_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2) (3.00 \times 10^5 \text{ N/C})^2$$

$$= 0.398 \text{ J/m}^3$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} (2.66 \times 10^{-11} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2) (1.00 \times 10^5 \text{ N/C})^2$$

$$= 0.133 \text{ J/m}^3$$

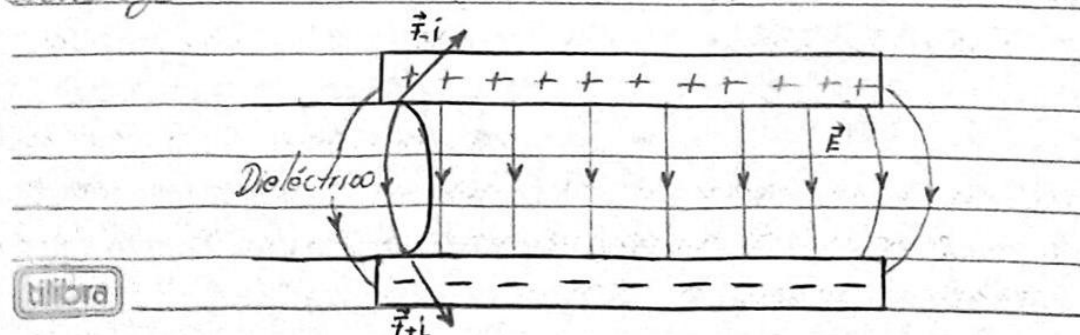
La densidad de energía con el dieléctrico es un tercio de la densidad de energía original.

Evaluar: la respuesta para u_0 se comprueba al observar que el volumen entre las placas es $V = (0,200\text{m}^2)(0,0100\text{m}) = 0,00200\text{m}^3$. Como el campo eléctrico es uniforme entre las placas, u_0 también es uniforme y la densidad de energía es simplemente la energía almacenada dividida entre el volumen:

$$u_0 = \frac{U_0}{V} = \frac{7,97 \times 10^{-4}\text{J}}{0,00200\text{m}^3} = 0,398\text{J/m}^3$$

que concuerda con la respuesta anterior. Se puede utilizar el mismo método para comprobar el resultado de u_1 .

En general, cuando se inserta un dieléctrico en un capacitor mientras la carga en cada placa permanece igual, la permitividad ϵ se incrementa en un factor K (la constante dieléctrica), y el campo eléctrico E y la densidad de energía $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ disminuyen en un factor de $1/K$. ¿A dónde se fue la energía? La respuesta está en el campo alrededor de las bordes de un capacitor real de placas paralelas. Como vemos en la figura, ese campo tiende a atraer al dieléctrico hacia el espacio entre las placas y el hacerlo efectúa un trabajo sobre él. Puesto que el campo realiza un trabajo, la densidad de energía del campo disminuye.



Evalue su comprensión: El espacio entre las placas de un capacitor aislado de placas paralelas está ocupado por un bloque de material dieléctrico con constante dieléctrica K . Las dos placas del capacitor tienen Q y $-Q$. Se extrae el bloque dieléctrico. Si las cargas no cambian, cómo se modifica la energía en el capacitor cuando se retira el material dieléctrico? i. Se incrementa; ii. disminuye; iii. permanece igual.

Respuesta: i. Aquí, Q permanece sin cambio, por lo que se emplea $U = Q^2/2C$ para la energía almacenada. Si se retira el dieléctrico, la capacitancia se reduce en un factor de $1/K$; como U es inversamente proporcional a C , la energía almacenada aumenta en un factor de K . Se requiere trabajo para retirar el bloque dieléctrico del capacitor porque el campo de los bordes tiende a extraerlo de regreso. El trabajo realizado pasa a la energía almacenada en el capacitor.

Evalue su comprensión: Un capacitor tiene cargas Q y $-Q$ en sus dos placas paralelas. Después se inserta un bloque de dieléctrico con $K=3$ en el espacio entre las placas. Ordene las siguientes magnitudes de campo eléctrico en forma decreciente. i. El campo antes de insertar el dieléctrico; ii. el campo resultante después de haber insertado el dieléctrico; iii. el campo debido a las cargas ligadas.

Respuesta: i, iii, ii. La ecuación $E = E_0/K$ establece que si E_0 es la magnitud del campo eléctrico inicial (antes de insertar el dieléctrico), entonces la magnitud del campo resultante después de insertar el dieléctrico es tilibra

$E_0/K = E_0/3$. La magnitud del campo inicial y la magnitud E_i del campo debido a las cargas ligadas. Por lo tanto, $E_0 - E_i = 2E_0/3$.

Ejemplo 24.12: Capacitor esférico con dieléctrico

Utilice la ley de Gauss para obtener la capacitancia en el capacitor esférico del ejemplo 24.3, si el volumen entre las esferas huecas está lleno de un cierto aislante cuya constante dieléctrica es igual a K .

Identificar y plantear: La simetría esférica del problema no cambia con la presencia del dieléctrico, de modo que, al igual que en el ejemplo 24.3, se utiliza una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio r entre las esferas. Como hay un dieléctrico, la ley de Gauss se emplea en la forma de la siguiente ecuación: $\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$

Resolver:

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint K\vec{E} dA = KE \oint dA = (KE)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

donde $\epsilon = K\epsilon_0$. En comparación con el caso en que hay vacío entre las esferas huecas conductoras, el campo el campo eléctrico se reduce a un factor de $1/K$. La diferencia de potencial V_{ab} entre las esferas huecas disminuyen en el mismo factor, por lo que la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ se incrementa en un factor de K , al igual que para un capacitor de placas paralelas



cuando se inserta un dieléctrico. Utilizando el resultado del ejemplo 24.3, se determina que la capacitancia con el dieléctrico es:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r a b}{b-a} - \frac{4\pi\epsilon_0 a b}{b-a}$$

Evaluar: Si el dieléctrico llena por completo el volumen entre los dos conductores, la capacitancia es simplemente el producto de K por el valor sin dieléctrico. El resultado es más complicado si el dieléctrico llena sólo parcialmente este volumen.

Evalúe su comprensión: Una sola carga puntual q está incrustada en un bloque muy grande de dieléctrico cuya constante dieléctrica es K . En cierto punto dentro del dieléctrico a una distancia r de la carga puntual, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico? i. $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, ii. $Kq/4\pi\epsilon_0 r^2$; iii. $q/4\pi K\epsilon_0 r^2$; iv. ninguna de las anteriores.

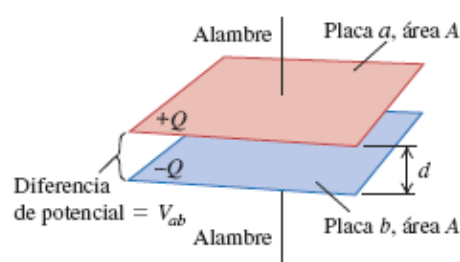
Respuesta: iii

La ecuación (24.23) muestra que esta situación es la misma en una carga puntual aislada en el vacío pero sustituyendo $\vec{E}$ por $K\vec{E}$. Así, $K\vec{E}$ en el punto de interés es igual a $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, y por eso $\vec{E} = q/4\pi K\epsilon_0 r^2$.

Al igual que en el ejemplo 24.12, si se llena el espacio con un dieléctrico, el campo eléctrico se reduce a un factor de $1/K$.

$$\text{ecuación (24.23)} \quad \oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc-libre}}}{\epsilon_0}$$

CAPACITANCIA Y DIELECTRICOS



$$C = \frac{Q}{V_{ab}}$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

CAPACITORES Y CAPACITANCIA

Un capacitor es un dispositivo que almacena energía potencial eléctrica y carga eléctrica. Un capacitor consiste en un par de conductores separados por un material aislante. Al cargarse el capacitor, tiene cargas Q de igual magnitud y signo opuestos, el potencial V_{ab} del conductor con carga positiva con respecto al que tiene carga negativa es proporcional a Q. La capacitancia C se define como la razón entre Q y V_{ab} .

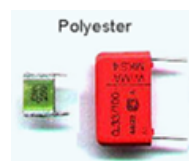
La unidad en el SI para la capacitancia es el farad (F): $1F = 1C/V$.

Un capacitor de placas paralelas consiste en dos placas conductoras, cada una con un área A separadas por una distancia d. Si están separadas por vacío, la capacitancia solo depende de A y d. Para otras geometrías, la capacitancia se obtiene a partir de la definición $C = Q/V_{ab}$

TIPOS DE CAPACITORES Y SU REPRESENTACIÓN

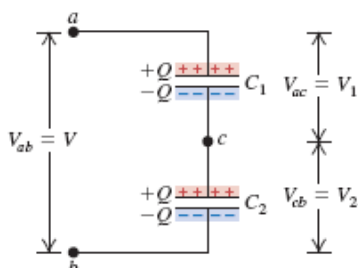
La capacitancia depende de la geometría del capacitor, es directamente proporcional al área A de cada placa e inversamente proporcional a su separación. Cuando hay material entre la placas, sus propiedades afectan la capacitancia.

Símbolo



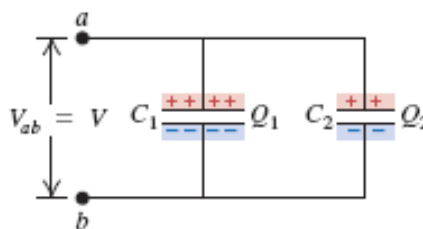
CAPACITORES EN SERIE Y EN PARALELO

Cuando se conectan en serie capacitores con capacitancias $C_1, C_2, C_3, \dots$ el recíproco de la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Cuando los capacitores se conectan en paralelo, la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de las capacitancias individuales.



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (\text{capacitores en serie})$$

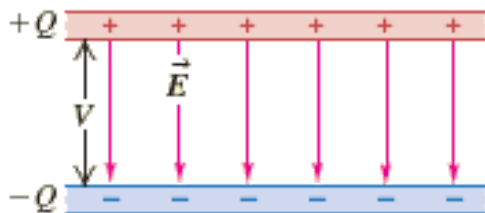
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (\text{capacitores en paralelo})$$



ENERGÍA EN UN CAPACITOR

Las aplicaciones más importantes de los capacitores dependen de su capacidad para almacenar energía. La energía potencial eléctrica almacenada es exactamente igual a la cantidad de trabajo requerido para cargarlo, es decir para separar cargas opuestas y colocarlas en conductores diferentes. La energía U que requiere para cargar un capacitor C a una diferencia de potencial V y carga Q es igual a la energía almacenada en el capacitor.

La energía almacenada se puede considerar como si residieran en un campo eléctrico entre los conductores; la densidad de energía u (energía por volumen) es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico.

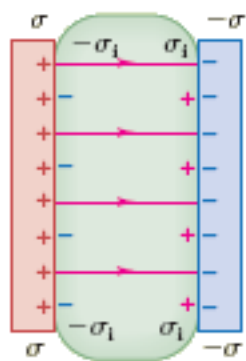


$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \quad (\text{energía potencial almacenada en un capacitor})$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (\text{densidad de energía eléctrica en vacío})$$

DIELECTRICOS

DIELECTRICO ENTRE LAS PLACAS



$$C = KC_0 = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d}$$

(capacitor de placas paralelas con un dieléctrico)

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2$$

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc-libre}}{\epsilon_0}$$

La ley de Gauss en el dieléctrico tiene casi la misma forma que en el vacío, con dos diferencias fundamentales: E se sustituye por KE, Qenc se sustituye por Qenc-libre, que incluye solo la carga libre (no la ligada) encerrada por la superficie gaussiana.