**TAREA 4:** FÍSICA II

- **RESUME DEL CAPÍTULO 23 "POTENCIAL ELÉCTRICO".**
- **LIBRO:** HUGH. YOUNG, ROGER A. FREEDEMAN. SEARS Y ZEMANSKY *"FÍSICA UNIVERSITARIA CON FÍSICA MODERNA VOLUMEN 2".*
- **ALUMNO:** JONATAN MÁRQUEZ

# Potencial Eléctrico

Este capitulo trata de la energía asociada con las interacciones electricas.
Se combinarán los conceptos de trabajo y energía con los que ya se han visto como, carga electri fuerzas electricas y campos electricos.
Cuando una partícula con carga se mueve en un campo eléctrico, este último ejerce una fuerza que efectua un trabajo sobre la partícula. Dicho trabajo siempre se puede expresar en términos de energía potencial eléctrica.
Se describira la energía potencial eléctrica, utilizando un concepto nuevo llamado potencial eléctrico o simplemente potencial. Es frecuente llamar a una diferencia de potencial de voltaje.
Estos conceptos son fundamentales para entender la manera en que funcionan los circuitos eléctricos.

## Energía potencial eléctrica

Los conceptos de trabajo, energía potencial y conservac de la energía son muy útiles en el estudio de la mecánica. Estos conceptos son igual de útiles para el estudio y el análisis de las interacciones eléctricas.
En primer lugar, cuando una fuerza $\vec{F}$ actua sobre una partícula que se mueve de un punto a a un punto b, el $W_{a\to b}$ efectuado por la fuerza está dado por la siguiente integral de linea:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b F \cos\phi \, dl$$ ecuación: 23.1

donde $dl$ es un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria de la partícula, y $\phi$ es el ángulo entre $\vec{F}$ y $dl$ en cada punto de la trayectoria.

En segundo lugar, si la fuerza $\vec{F}$ es conservativa, el trabajo realizado por $\vec{F}$ siempre se puede expresar en términos de una energía potencial $U$. Cuando la partícula se mueve de un punto donde la energía potencial es $U_a$ a otro donde es $U_b$, el cambio en la energía potencial es $\Delta U = U_b - U_a$, y:

energía potencial en posición inicial.

$$\underbrace{W_{a\to b}}_{\text{Trabajo efectuado por una fuerza conservativa}} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = \underbrace{-\Delta U}_{\text{Negativo del cambio en la energía potencial}}$$

energía potencial en la posición final

ecuación: 23.2

Cuando $W_{a\to b}$ es positivo, $U_a$ es mayor que $U_b$, $\Delta U$ es negativa y disminuye la energía potencial. Esto es lo que ocurre cuando una pelota cae de un punto elevado (a) a otro más bajo (b) por el efecto de la gravedad terrestre; la fuerza de la gravedad realiza un trabajo positivo, y la energía potencial gravitacional disminuye. Cuando se lanza una pelota hacia arriba, la fuerza gravitacional realiza un trabajo negativo durante el ascenso, y aumenta la energía potencial.

En tercer lugar, el teorema del trabajo y la energía establece que el cambio de la energía cinética $\Delta K = K_b - K_a$ durante cualquier desplazamiento es igual al trabajo total realizado sobre la partícula. Si el trabajo realizado sobre la partícula, lo realizan fuerzas concervativas, entonces la ecuación anterior describe el trabajo total, y $Kb - Ka = -(Ub - Ua)$. Por lo general se escribe así:

$$Ka + Ua = Kb + Ub \qquad \text{ecuación: } 23.3$$

Es decir, en tales circunstancias, se conserva la energía mecánica total (energía cinética más energía potencial).

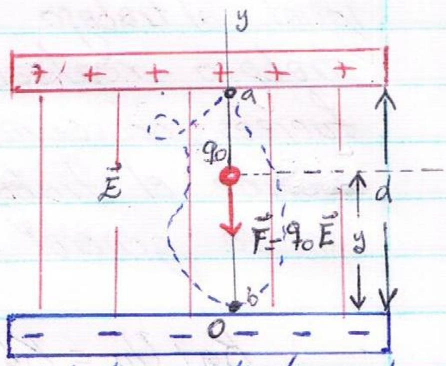
## Energía potencial eléctrica en un campo uniforme.

Un par de placas metálicas paralelas con cargas, generan un campo eléctrico uniforme desendente de magnitud $E$. El campo ejerce una fuerza hacia abajo de magnitud $F = q_0 . E$ sobre una carga de prueba positiva $q_0$. A medida que la carga se mueve hacia abajo una distancia $d$ del punto de $a$ al punto $b$, la fuerza sobre la carga de prueba es constante e independiente de su ubicación. Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo eléctrico es el producto de la magnitud de la fuerza y la componente de desplazamiento en la dirección (decendente) de la fuerza:

$$W_{a \to b} = Fd = q_0 Ed \qquad \text{ecuación: } 23.4$$

Este trabajo es positivo, ya que la fuerza está en la misma dirección que el desplazamiento neto de la carga de prueba.

La componente y de la fuerza eléctrica, $F_y = -q_0 E$, es constante, y no hay componente x ni z. Por lo que podemos concluir que la fuerza ejercida sobre $q_0$ por el campo eléctrico de la figura, es conservativa. Esto significa que el trabajo $W_{a\to b}$ efectuado por el campo es independiente de la trayectoria que sigue la partícula de a a b. Se puede representar en función de energía potencial U.




El trabajo realizado por la fuerza eléctrica es el mismo para cualquier trayectoria de a a b:

$$W_{a\to b} = -\Delta U = q_0 E d$$

La energía potencial para la fuerza eléctrica $F_y = -q_0 E$ es:

$$U = q_0 E y \qquad \text{ecuación: 23, 5}$$

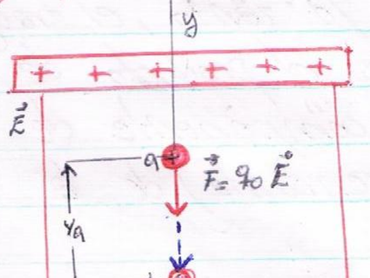
Cuando la carga de prueba se mueve de la altura ya, el trabajo efectuado sobre la carga por el campo está dado por:

$$W_{a\to b} = -U = -(U_b - U_a) = -(q_0 E y_b - q_0 E y_a) = q_0 E (y_a - y_b)$$

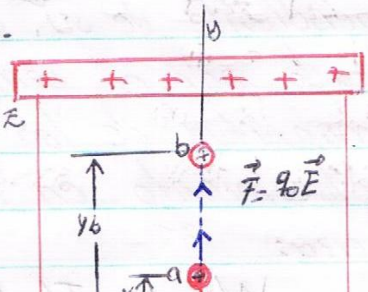
ecuación: 23,6

Carga positiva:

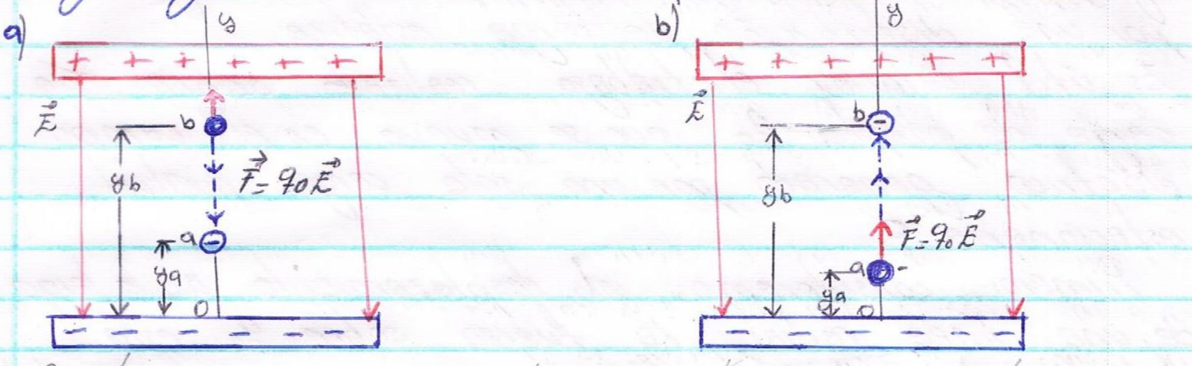
a.




b.



carga negativa:




Cuando $y_a$ es mayor $y_b$, la carga de prueba positiva $q_0$ se mueve hacia abajo, en la misma dirección que $\vec{E}$; el desplazamiento tiene lugar en la misma dirección que la fuerza $\vec{F}=q_0\vec{E}$, por lo que el campo realiza trabajo positivo y $U$ disminuye. Cuando $y_a$ es menor que $y_b$, figura b, la carga de prueba positiva $q_0$ se mueve hacia arriba, en dirección opuesta a $\vec{E}$; el desplazamiento es opuesto a la fuerza, el campo realiza un trabajo negativo y $U$ aumenta.

Si la carga de prueba $q_0$ es negativa, la energía potencial aumenta cuando se mueve a favor del campo y disminuye cuando se mueve en contra del campo.

Sea positiva o negativa la carga de prueba $q_0$ se mueve en la dirección opuesta a la fuerza eléctrica $\vec{F}=q_0\vec{E}$; $U$ disminuye si $q_0$ se mueve en la misma dirección que $\vec{F}=q_0\vec{E}$.

## Energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales.

La idea de la energía potencial eléctrica no se limita al caso especial de un campo eléctrico uniforme. Este concepto se aplica a una carga puntual en cualquier campo eléctrico generado por una distribución de carga estática.

Es útil calcular el trabajo realizado sobre una carga de prueba $q_0$ que se mueve en el campo eléctrico generado por una sola carga puntual estacionaria $q$.

Primero, consideremos el desplazamiento a lo largo de una línea radial. La fuerza sobre $q_0$ está dada por la ley de Coulomb, y su componente radial es:

$$F_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^2}$$

ecuación : 23.7

Si $q$ y $q_0$ tienen el mismo signo (+ o −), la fuerza es de repulsión y $F_r$ es positiva; si las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza es de atracción y $F_r$ es negativa. La fuerza no es constante durante el desplazamiento, y se tiene que integrar para calcular el trabajo $W_{a\to b}$ que realiza esta fuerza sobre $q_0$ a medida que $q_0$ se mueve de a a b:

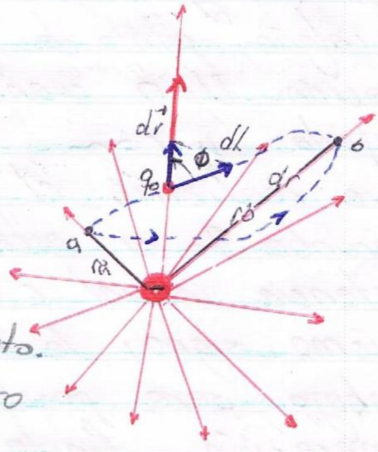
$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r\,dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^2} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

ecuación : 23.8

El trabajo efectuado por la fuerza eléctrica para esta trayectoria depende únicamente de los puntos en los extremos.

Un desplazamiento mas general, donde a y b no estén en la misma línea radial:

$$W_{a \to b} = \int_{r_a}^{r_b} F \cdot \cos\phi \, dL = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q q_0}{r^2} \cos\phi \, dl$$




La figura muestra que $\cos\phi \, dl = dr$.
Es decir el trabajo realizado durante un desplazamiento pequeño $dL$ depende sólo del cambio $dr$ de la distancia $r$ entre las cargas, la cual es la componente radial del desplazamiento.
Observemos entonces que el trabajo que efectúa sobre $q_0$ el campo eléctrico $\vec{E}$ producido por $q$ sólo depende de $r_a$ y $r_b$, no de los detalles de la trayectoria. Si $q_0$ regresa a su punto inicial a por una trayectoria diferente, el trabajo total que se realiza en el desplazamiento de ida y vuelta es igual a cero. Esto son características propias de una fuerza conservativa. La fuerza sobre $q_0$ es conservativa.
Si se define $U_a = qq_0/4\pi\epsilon_0 r_a$ como la energía potencial cuando $q_0$ esta a una distancia $r_a$ de $q$ y se define $U_b = qq_0/4\pi\epsilon_0 r_b$ como la energía potencial cuando $q_0$ esta a una distancia $r_b$ de $q$. Así:

Energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales. $\rightarrow$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r}$$

Valores de las dos cargas

Distancia entre las dos cargas.

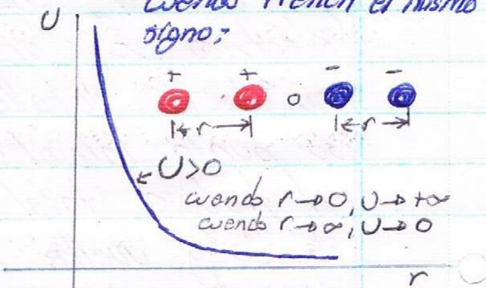
constante eléctrica

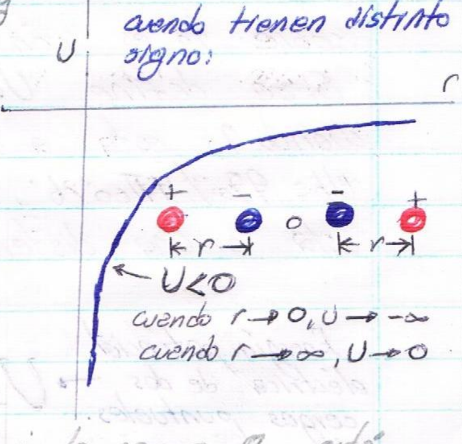
ecuación 23,9

Esta ecuación es válida independientemente de los signos de $q$ y $q_0$. La energía potencial es positiva si las cargas $q$ y $q_0$ tienen el mismo signo, y negativa si tienen signos opuestos.

La energía potencial siempre se define en relación con algún punto de referencia donde $U=0$. En esta ecuación $U=0$ cuando $q$ y $q_0$ están infinitamente alejadas y $r=\infty$. Entonces, $U$ representa el trabajo que realizaría el campo de $q$ sobre la carga de prueba $q_0$ si esta última se desplazara de una distancia inicial $r$ al infinito. Si $q$ y $q_0$ tienen el mismo signo, la interacción será de repulsión, este trabajo será positivo y $U$ será positiva en cualquier separación finita. Si las cargas tienen signos opuestos, la interacción es de atracción, el trabajo efectuado será negativo y $U$ será negativa.

Es importante destacar que la energía potencial $U$ es una propiedad compartida de las dos cargas. Si la distancia entre $q$ y $q_0$ cambia de $r_a$ a $r_b$, el cambio de la energía potencial es el mismo si $q$ permanece fija y $q_0$ se mueve, o si $q_0$ se mantiene fija y $q$ es la que se mueve. Por tal razón, nunca se usa la frase "la energía potencial eléctrica de una carga puntual."




Esta ecuación también se cumple, si la carga $q_0$ está afuera de una distribución de carga con simetría esférica con carga total $q$; la distancia $r$ va de $q_0$

al centro de la distribución. Esto es porque la ley de Gauss indica que el campo eléctrico afuera de tal distribución es el mismo que habría si toda la carga $q$ estuviera concentrada en el centro

## Ej: Conservación de la energía con fuerzas eléctricas.

Un positrón (antipartícula del electrón) tiene una masa de $9.11 \times 10^{-31}$ Kg y una carga $q_0 = +e = 1.60 \times 10^{-19}$ C. Suponga que un positrón se mueve en la vecindad de una partícula $\alpha$ (alfa), cuya carga es $q = +2e = 3.20 \times 10^{-1}$ C y con masa $6.64 \times 10^{-27}$ Kg. La partícula $\alpha$ tiene una masa 7000 veces mayor que la del positrón por lo que se supondrá que está en reposo. Cuando el positrón está a $1.00 \times 10^{-10}$ m de la partícula $\alpha$, se aleja de ésta con una rapidez de $3.00 \times 10^{6}$ m/s. a) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando están separadas una distancia de $2.00 \times 10^{-10}$ m? b) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando está muy alejado de la partícula $\alpha$?

c) Suponga que las condiciones iniciales son las mismas, pero la partícula que se mueve es un electrón (con la misma masa que el positrón, pero con carga $q_0 = -e$). Describa el movimiento subsiguiente.

## Identificar y Plantear:

La fuerza eléctrica entre un positrón (o un electrón) y la partícula $\alpha$ es conservativa, por lo que se conserva la energía mecánica (cinética más potencial

La energía potencial $U$ a cualquier distancia $r$ está dada por la ecuación $U = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot qq_0/r$. La función de la energía potencial de los incisos a) y b) se parece a la figura 23.7a, y la función del inciso c) se parece a la figura 23.7b. Se conoce la rapidez del positrón $v_a = 3.00 \times 10^6$ m/s cuando la separación entre las partículas es $r_a = 1.00 \times 10^{-10}$ m. En el inciso a) y b) se usen las ecuaciones $K_a + U_a = K_b + U_b$ y $U = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot qq_0/r$ para determinar la rapidez de $r = r_b = 2.00 \times 10^{-10}$ m y $r = r_c \to \infty$, respectivamente. En el inciso c) se sustituye el positrón por un electrón y se vuelve a resolver el problema.

**Ejecutar:** a) Ambas partículas tienen carga positiva, de modo que el positrón aumenta su rapidez conforme se aleja de la partícula $\alpha$. Conforme con la ecuación de la conservación de la energía, la energía cinética final es:

$$K_b = \frac{1}{2} m v_b^2 = K_a + U_a - U_b$$

En esta expresión:

$$K_a = \frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{2} (9.11 \times 10^{-31} \text{kg})(3.00 \times 10^6 \text{m/s})^2$$

$$= 4.10 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r_a} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(3.20 \times 10^{-19} \text{C})(1.60 \times 10^{-19} \text{C})}{1.00 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

$$= 4.61 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$U_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r_b} = 2.30 \times 10^{-18} \text{ J}$$

De modo que la energía cinética del positrón y su rapidez en $r = r_b = 2{,}00 \times 10^{-10}$ m son:

$$K_b = \frac{1}{2} m \cdot v_b^2 = 4{,}10 \times 10^{-18}\,J + 4{,}61 \times 10^{-18}\,J - 2{,}30 \times 10^{-18}\,J$$

$$= 6{,}41 \times 10^{-18}\,J$$

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(6{,}41 \times 10^{-18}\,J)}{9{,}11 \times 10^{-31}\,kg}} = 3{,}8 \times 10^{6}\,m/s$$

b) Cuando el positrón y la partícula $\alpha$ están muy separados de modo que $r \to \infty$, la energía potencial final $U_c$ tiende a cero. Nuevamente, a partir de la conservación de la energía, en este caso la energía cinética final y la rapidez del positrón son:

$$K_c = K_a + U_a - U_c = 4{,}10 \times 10^{-18}\,J + 4{,}61 \times 10^{-18}\,J - 0$$
$$= 8{,}71 \times 10^{-18}\,J$$

$$v_c = \sqrt{\frac{2K_c}{m}} = \sqrt{\frac{2(8{,}71 \times 10^{-18}\,J)}{9{,}11 \times 10^{-31}\,kg}} = 4{,}4 \times 10^{6}\,m/s$$

c) El electrón y la partícula $\alpha$ tienen cargas opuestas, de modo que la fuerza es de atracción y el electrón desacelera conforme se aleja. El cambio de signo de la partícula en movimiento de $+e$ a $-e$ quiere decir que la energía potencial inicial es ahora $U_a = -4{,}61 \times 10^{-1}$ La cual representa la energía negativa mecánica total:

$$K_a + U_a = (4{,}10 \times 10^{-18}\,J) - (4{,}61 \times 10^{-18}\,J) = -0{,}51 \times 10^{-18}\,J$$

La energía mecánica total tiene que ser positiva para que el electrón se mueva infinitamente lejos de la partícula $\alpha$. Al igual que una piedra lanzada con poca rapidez hacia arriba desde la superficie de la Tierra, alcanzará su separación máxima $r = r_d$ de la partícula $\alpha$ antes de invertir su dirección. En este punto, su rapidez y energía cinética $K_b$ son iguales a cero, de modo que en la separación $r_d$ tenemos:

$$U_d = K_a + U_a - K_d = (-0.51 \times 10^{-18} J) - 0$$

$$U_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q q_0}{r_d} = 0.51 \times 10^{-18} J$$

$$r_d = \frac{1}{U_d} \cdot \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} = \frac{(9.0 \times 10^9 N.m^2/C^2)(3.20 \times 10^{-19} C)(-1.60 \times 10^{-19} C)}{-0.51 \times 10^{-18} J}$$

$$= 9.0 \times 10^{-10} m$$

Para $r_b = 2.00 \times 10^{-10} m$, tenemos que $U_b = -2.30 \times 10^{-18} J$, de manera que la energía cinética y la rapidez del electrón en este punto son:

$$K_b = \frac{1}{2} m . v_b^2$$

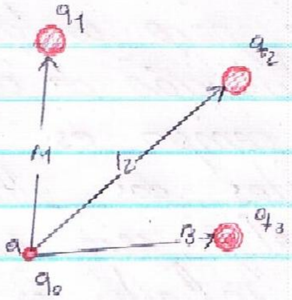
$$= 4.10 \times 10^{-18} J + (-4.61 \times 10^{-18} J) - (-2.30 \times 10^{-18} J)$$

$$= 1.79 \times 10^{-18} J$$

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.79 \times 10^{-18} J)}{9.11 \times 10^{-31} Kg}} = 2.0 \times 10^{6} m/s$$

**Evaluar:** Ambas partículas se comportan como se esperaba conforme se alejan de la partícula $\alpha$: el positrón acelera, y el electrón desacelera y, con el tiempo, regresa.

# Energía potencial eléctrica con varias cargas puntuales.




Suponga que el campo eléctrico $\vec{E}$ donde se desplaza la carga $q_0$ se debe a varias cargas puntuales $q_1, q_2, q_3\ldots$ a distancias $r_1, r_2, r_3 \ldots$ a partir de $q_0$. El campo eléctrico total en cada punto es la suma vectorial de los campos debido a las cargas individuales, y el trabajo total realizado sobre $q_0$ durante cualquier desplazamiento es la suma de las contribuciones de las cargas individuales. A partir de la ecuación $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q q_0}{r}$ se concluye que la energía potencial asociada con la carga de prueba $q_0$ en el punto a es la suma algebraica (no la suma vectorial):

Energía potencial eléctrica de una carga puntual $q_0$ un conjunto de cargas $q_1, q_2, q_3\ldots$

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

constante eléctrica — distancia de $q_0$ a $q_1, q_2, q_3 \ldots$

ecuación: 23.10

Cuando $q_0$ está en un punto b diferente, la energía potencial está dada por la misma expresión, pero $r_1, r_2, \ldots$ son las distancias desde $q_1, q_2\ldots$ hasta el punto b. El trabajo efectuado sobre la carga $q_0$ cuando se desplaza de a a b a lo largo de cualquier trayectoria es igual a la diferencia $U_a - U_b$ entre las energías potenciales cuando $q_0$ está en a y luego en b.

Se puede representar cualquier distribución de carga como un conjunto de cargas puntuales, por lo que esta ecuación indica que siempre se puede encontrar una función de energía potencial para cualquier campo eléctrico estático. Se infiere que para cualquier campo eléctrico debido a una distribución de carga estática, la fuerza ejercida por ese campo es conservativa.

Estas dos ultimas ecuaciones, establecen que $U$ es igual a cero cuando todas las distancias $r_1, r_2 \dots$ son infinitas, es decir, cuando la carga de prueba $q_0$ está muy lejos de todas las cargas que producen campo. Igual que para cualquier función de la energía potencial, el punto donde $U=0$ es arbitrario, siempre se puede sumar una constante que iguale $U$ con un cero en cualquier punto que se elija.

Esta ecuación de la energía potencial asociada con presencia de la carga de prueba $q_0$ en el campo $\vec{E}$ producido por $q_1, q_2, q_3 \dots$ Pero también hay energía potencial implicada en el arreglo de estas cargas. Si se comienza con las cargas $q_1, q_2, q_3, \dots$ todas separadas entre sí por distancias infinitas, y luego se acercan de manera que la distancia entre $q_i$ y $q_j$ sea $r_{ij}$, la energía total $U$ es la suma de las energías potenciales de la interacción de cada cargas. Se escribe:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

ecuación-23.11

Esta suma se extiende sobre todos los pares de cargas; no se permite que $i=j$ (porque eso sería la interacción de una carga consigo misma), y sólo se incluyen términos con $i < j$ para garantizar que cada par se tome en cuenta sólo una vez. Así, para considerar la interacción entre $q_3$ y $q_4$, se incluye un término con $i = 3$ y $j = 4$, pero no un termino con $i = 4$ y $j = 3$.

## Interpretación de la energía potencial eléctrica.

Se ha definido la energía potencial eléctrica en términos del trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una partícula con carga que se mueve en el campo, en forma similar a la definición de energía potencial visto anteriormente.

Cuando una partícula se desplaza del punto a al b, el trabajo que realiza sobre ella el campo eléctrico es $W_{a \to b} = U_a - U_b$. Entonces, la diferencia de energía potencial $U_a - U_b$ es igual al trabajo que efectúa la fuerza eléctrica cuando la partícula se desplaza de a a b. Cuando $U_a$ es mayor que $U_b$, el campo realiza trabajo positivo sobre la partícula conforme "cae" de un punto de mayor energía potencial (a) a otro con menor energía potencial (b).

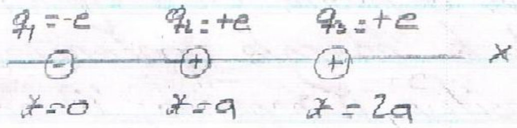
Una forma alternativa y equivalente, es considerar cuánto trabajo se hubiera tenido que realizar para "subir" la partícula desde un punto b, donde la energía potencial es $U_b$, hasta un punto a en el cual la energía potencial tiene un valor mayor $U_a$ (como al empujar dos cargas positivas para acelerarlas). Para mover la partícula lentamente (de manera que no se le imparta ninguna energía cinética), es necesario ejercer una fuerza externa adicional $\vec{F}_{ext}$ que sea igual y opuesta a la fuerza del campo eléctrico y realice un trabajo positivo. La diferencia de energía potencial $U_a - U_b$ se define entonces como el trabajo que debe efectuar una fuerza externa para desplazar lentamente la partícula desde $b$ hasta $a$ en contra la fuerza eléctrica. Como $\vec{F}_{ext}$ es el negativo de la fuerza del campo eléctrico y el desplazamiento ocurre en dirección opuesta, esta definición de la diferencia de potencial $U_a - U_b$ es equivalente a lo que se dio antes. Esto funciona si $U_a$ es menor que $U_b$, lo que corresponde a "bajar" la partícula; un ejemplo de esto es alejar dos cargas positivas una de la otra. En este caso, $U_a - U_b$ de nuevo es igual al trabajo realizado por la fuerza externa, pero ahora este trabajo es negativo.

**Ej: Sistema de cargas puntuales.**

Dos cargas puntuales se localizan en el eje $x$: $q_1 = -e$ en $x = 0$, y $q_2 = +e$ en $x = a$. a) Determine el trabajo que debe realizar una fuerza externa para llevar una tercera carga puntual $q_3 = +e$ del infinito a $x = 2a$. b) Determine la energía potencial total del sistema de tres cargas.

**Identificar y Plantear:** La figura presenta el arreglo final de las tres cargas. En el inciso a) necesitamos obtener el trabajo $W$ que debe realizar sobre $q_3$ una fuerza externa $\vec{F}_{ext}$ para traer $q_3$ del infinito a $x = 2a$. Esto se hace usando la ecuación (23.10) para obtener la energía potencial asociada con $q_3$ en presencia de $q_1$ y $q_2$. En el inciso b) se emplea la ecuación (23.11), que es la expresión de la energía potencial de un conjunto de cargas puntuales, para determinar la energía potencial total del sistema.

**Ejecutar:** a) El trabajo W es igual a la diferencia entre i. la energía potencial U asociada con $q_3$ cuando está en $x = 2a$ y ii la energía potencial que tiene cuando está infinitamente lejos. La segunda de estas es igual a cero, por lo que el trabajo requerido es igual a U. Las distancias entre las cargas son $r_{13} = 2a$ y $r_{23} = a$, por lo que a partir de la ecuación (23.10),




$$W = U = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-e}{2a} + \frac{+e}{a}\right) = \frac{+e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

El trabajo es positivo, tal como lo esperábamos. Si $q_3$ se trae del infinito a lo largo del eje $+x$, es atraída por $q_1$ pero repelida con más fuerza por $q_2$; por ello, debe hacerse un trabajo positivo para llevar $q_3$ a la posición $x = 2a$.

b) La energía potencial total del sistema de tres cargas está dada por la ecuación (23.11):

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(-e)(e)}{a} + \frac{(-e)(e)}{2a} + \frac{(e)(e)}{a} \right] = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Evaluar: El resultado negativo en el inciso b) significa que el sistema tiene menos energía potencial de la que tendría si las tres cargas estuvieran infinitamente alejadas. Una fuerza externa tendría que hacer trabajo negativo para traerla del infinito y acomodarla en su arreglo, y trabajo positivo para llevarlas de regreso al infinito.

Evalúe su comprensión: Considere el sistema de tres cargas puntuales visto en el ejemplo 21.4 (sección 21.3) y que se ilustra en la figura 21.14. a) ¿Cuál es el signo de la energía potencial total de este sistema? i positivo, ii negativo; iii. cero. b) ¿Cuál es el signo de la cantidad total de trabajo que tendría que hacerse para llevar las cargas infinitamente lejos una de otra? i positivo; ii negativo; iii cero.

Respuesta: a) i, b) ii

Las tres cargas $q_1$, $q_2$ y $q_3$ son positivas, de modo que los tres términos de la suma de la ecuación (23.11), $q_1q_2/r_{12}$, $q_1q_3/r_{13}$ y $q_2q_3/r_{23}$, son positivos. Por lo tanto, la energía potencial eléctrica total $U$ es positiva, lo cual significa que se requeriría trabajo positivo para llevar las tres cargas del infinito a las posiciones que se indican en la figura 21.14 y trabajo negativo para llevarlas de regreso de esas posiciones al infinito.

# Potencial Eléctrico

Se ha estudiado la energía potencial U asociada con una carga de prueba $q_0$ en un campo eléctrico. Ahora nos interesa describir esta energía potencial "por unidad de carga," de la misma forma como el campo eléctrico describe la fuerza por unidad de carga sobre una partícula cargada en el campo. Esto nos lleva al concepto de potencial eléctrico.

El potencial es la energía potencial por unidad de carga. El potencial V se define, en cualquier punto del campo eléctrico, como la energía potencial U por unidad de carga asociada con una carga de prueba $q_0$ en ese punto:

$$V = \frac{U}{q_0} \quad \text{o bien} \quad U = q_0 V$$

ecuación: 23.12

Tanto la energía potencial como la carga son escalares, por lo que el potencial es una cantidad escalar. Su unidad en el SI es el volt (1V) y es igual a 1 Joule por colomb:

$$1V = 1\,\text{volt} = 1\,J/C = 1\,\text{Joule}/\text{Coulomb}$$

La ecuación (23.2) iguala el trabajo realizado por la fuerza eléctrica durante un desplazamiento de a a b con la cantidad $-\Delta U = -(U_b - U_a)$ sobre la base de "trabajo por unidad de carga". Al dividir esta ecuación entre $q_0$ se obtiene:

$$\frac{W_{a\to b}}{q_0} = \frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = (V_b - V_a) = V_a - V_b$$

ecuación: 23.13

donde $V_a = U_a / q_0$ es la energía potencial por unidad de carga en el punto a; $V_b$ se define de forma análoga. $V_a$ y $V_b$ se denominan el potencial en el punto a y potencial en el punto b, respectivamente. De este modo, el trabajo realizado en cada unidad de carga, por la fuerza eléctrica cuando un cuerpo con carga se desplaza de a a b es igual al potencial en a menos el potencial en b.

La diferencia $V_a - V_b$ se llama potencial de a con respecto a b; en ocasiones esa diferencia se abrevia $V_{ab} = V_a - V_b$ (observe el orden en los subíndices). Con frecuencia, esta expresión se conoce como diferencia de potencial entre a y b; pero se debe especificar cuál es el punto de referencia. Así la ecuación (23.13) establece: $V_{ab}$, el potencial (en V) de a con respecto a b, es igual al trabajo (en J) realizado por la fuerza eléctrica cuando una unidad de carga (1C) se desplaza de a a b.

Otra manera de interpretar la diferencia de potencial $V_{ab}$ en la ecuación (23.13) consiste en usar el punto de vista alternativo que ya se mencionó. Desde este punto de vista, $U_a - U_b$ es la cantidad de trabajo que debe realizar una fuerza externa para desplazar con lentitud una partícula de carga $q_0$ desde b hasta a en contra de la fuerza eléctrica. El trabajo que debe hacer por unidad de carga de la fuerza externa es, por lo tanto, $(U_a - U_b)/q_0 = V_a - V_b = V_{ab}$. En otras palabras, $V_{ab}$, el potencial (en V) de a con respecto a b, es igual al trabajo (en J) que debe efectuarse para desplazar con lentitud una unidad de carga (+1 C) desde b hasta a contra la fuerza eléctrica.

## Cálculo del potencial eléctrico

Para obtener el potencial V debido a una sola carga puntual q, se divide la ecuación (23.9) entre $q_0$:

Potencial eléctrico debido a una carga puntual

Valor de una carga puntual

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

Distancia de la carga puntual al sitio donde se mide el potencial.

Constante eléctrica

ecuación 23.14

Si q es positiva, el potencial que produce es positivo en todos los puntos; si q es negativa, produce un potencial negativo en todo lugar. En cualquier caso V es igual a cero en $r = \infty$, una distancia infinita desde la carga puntual. El potencial al igual que el campo eléctrico, es independiente de la carga de prueba $q_0$ que se utiliza para definirlo.

De manera similar, para obtener el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales, se divide la ecuación (23.10) entre $q_0$:

Potencial eléctrico debido a un conjunto de cargas puntuales

Valor de la i-ésima carga puntual

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

distancia de la carga puntual al sitio donde se mide el potencial

ecuación 23.15

Cuando se tiene una distribución continua de carga a lo largo de una línea, sobre una superficie o a través de un volumen, se divide la carga en elementos infinitesimales $dq$, y la suma en la ecuación (23.15) se convierte en una integral:

Potencial eléctrico debido a una distribución continua de carga

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

Integral sobre la distribución de carga

Elemento de carga

Distancia del elemento de carga al sitio donde se mide el potencial

ecuación 23.16

## Obtención del potencial eléctrico a partir del campo eléctrico.

Cuando se tiene un conjunto de cargas puntuales, la ecuación (23.15) es por lo general la forma más fácil de calcular el potencial $V$. Pero en ciertos problemas en los que se conoce el campo eléctrico o se puede calcular con mayor facilidad, es más fácil determinar $V$ a partir de $\vec{E}$, por lo que, según la ecuación (23.1), el trabajo realizado por la fuerza eléctrica conforme la carga de prueba se desplaza de a a b, está dado por:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Si esto se divide entre $q_0$ y se compara el resultado con la ecuación (23.13) se encuentra que:

Integral a lo largo de la trayectoria a a b

Desplazamiento

Diferencia de potencial eléctrico → $$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cdot \cos\phi \, dl$$

Ángulo entre $\vec{E}$ y $d\vec{l}$

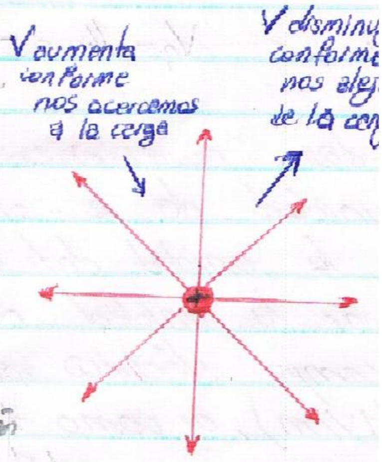
Producto escalar del campo eléctrico por el vector desplazamiento

Magnitud del campo eléctrico

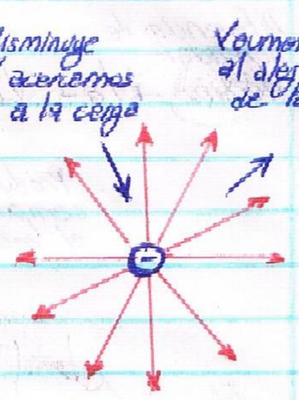
ecuación: 23.17

El valor de $V_a - V_b$ es independiente de la trayectoria de a a b, del mismo modo que el valor de $W_{a \to b}$ es independiente de la trayectoria. Para interpret esta ecuación, debemos recordar que $\vec{E}$ es la fuerza eléctrica por unidad de carga sobre una carga de prueba. Si la integral de línea $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ es positiva, el campo eléctrico efectúa un trabajo positivo sobre una carga de prueba positiva, conforme ésta se desplaza de a a b. En este caso la energía potencial eléctrica disminuye a medida que la carga de prueba se desplaza, por lo que la energía potencial por unidad de carga también decrece por consiguiente, $V_b$ es menor que $V_a$, y $V_a - V_b$ es positiva.

Como ilustración, considere una carga puntual positiva. El campo eléctrico se aleja de la carga y $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ es positivo a cualquier distancia finita de la carga. Si nos alejamos de la carga, en dirección $\vec{E}$, nos movemos hacia valores menores de V; si nos acercamos a la carga, en dirección opuesta a $\vec{E}$, nos desplazamos hacia



valores mayores de V; si nos acercamos a la carga, en dirección opuesta a $\vec{E}$, nos desplazamos hacia valores mayores de V. $\vec{E}$ está dirigido hacia la carga y $V = q/4\pi\varepsilon_0 r$ es negativo a cualquier distancia finita de la carga.




La regla general, válida para cualquier campo eléctrico, es la siguiente: desplazarse en la dirección de $\vec{E}$ significa hacerlo en la dirección decreciente de V, y desplazarse contra la dirección de $\vec{E}$ significa moverse en la dirección creciente de V.

Asimismo, una carga de prueba positiva $q_0$ experimenta una fuerza eléctrica en la dirección de $\vec{E}$, hacia menores valores de V; una carga de prueba negativa experimenta una fuerza opuesta a $\vec{E}$, hacia valores más grandes de V. Así, una carga positiva tiende a "caer" de una región de potencial elevado a otra de menor potencial. Lo contrario también se cumple para una carga negativa.

La ecuación (2.17) se puede rescribir como:

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \text{ecuación: 23.18}$$

Las ecuaciones (23.17) y (23.18) demuestran que la unidad de la diferencia de potencial (1V) es igual a la unidad del campo eléctrico (1N/C) multiplicada por la unidad de distancia (1m). Así, la unidad de campo eléctrico se expresa como 1 volt por metro (1V/m), o como 1 N/C:

$$1\,V/m = 1\,volt/metro = 1\,N/C = 1\,newton/coulomb$$

En la práctica, la unidad habitual para la magnitud del campo eléctrico es el volt por metro.

## Electrón-volts

La magnitud e de la carga del electrón se usa para definir una unidad de energía que es útil en muchos cálculos en los sistemas atómicos y nucle Cuando una partícula con carga q se desplaza de u punto donde el potencial es $V_b$ a otro donde es $V_a$, el cambio en la energía potencial U es:

$$U_a - U_b = q(V_a - V_b) = qV_{ab}$$

Si la carga q es igual a la magnitud e de la carga del electrón, $1{,}602 \times 10^{-19}$ C, y la diferencia de potencial es $V_{ab} = 1V$, el cambio en la energía es

$$U_a - U_b = (1{,}602 \times 10^{-19} C)(1V) = 1{,}602 \times 10^{-19} J$$

Esta cantidad de energía se define como 1 electrón-volt (1eV)

$$1eV = 1{,}602 \times 10^{-19} J$$

A menudo se utilizan los múltiplos meV, KeV, MeV, GeV y TeV.

Cuando una partícula con carga e se mueve a través de una diferencia de potencial de 1 Volt, el cambio de la energía potencial es 1eV. Si la carga es algún múltiplo de e, digamos Ne, el cambio en la energía potencial en el electrón-Volts es N veces la diferencia de potencial expresada en volts. Por ejemplo, cuando una partícula alfa, que tiene una carga de 2e, se desplaza entre dos puntos con diferencia de potencial de 1000 V, el cambio en la energía potencial es 2 (1000 eV) = 2000 eV. Para confirmarlo, se escribe:

$$U_a - U_b = q V_{ab} = (2e)(1000V) = (2)\cdot(1,602 \times 10^{-19} C)(1000V)$$
$$= 3,204 \times 10^{-16} J = 2000\ eV$$

Ej: Fuerza eléctrica y potencial eléctrico.

Un protón (carga $+e = 1,602 \times 10^{-19} C$) se desplaza en línea recta de un punto a a otro b una distancia $d = 0,50\ m$ en un acelerador lineal. A lo largo de esta línea, el campo eléctrico es uniforme con magnitud $E = 1,5 \times 10^7\ V/m = 1,5 \times 10 N/C$ en la dirección de a a b. Determine a) la fuerza sobre el protón; b) el trabajo realizado sobre el protón por el campo; c) la diferencia de potencial $V_a - V_b$.

Identificar y Plantear: Este problema usa la relación entre el campo eléctrico y la fuerza eléctrica. También utiliza la relación entre fuerza, trabajo y diferencia de energía potencial. Se da el campo eléctrico, por lo que es fácil determinar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre el protón. El cálculo del trabajo también es sencillo porque $\vec{E}$ es uniforme, lo cual significa que la fuerza sobre el protón es constante. Una vez que se conoce el trabajo, se determina $V_a - V_b$ usando la ecuación (23.13).

**Ejecutar:** a) La fuerza sobre el protón tiene la misma dirección que el campo eléctrico, y su magnitud es:

$$F = qE = (1{,}602\times10^{-19}C)(1{,}5\times10^{7}N/C) = 2{,}4\times10^{-12}N$$

b) La fuerza es constante y está en la misma dirección que el desplazamiento, de manera que el trabajo efectuado sobre el protón es:

$$W_{a\to b} = Fd = (2{,}4\times10^{-12}N)(0{,}50m)$$
$$= 1{,}2\times10^{-12}J$$
$$= (1{,}2\times10^{-12}J)\frac{1eV}{1{,}602\times10^{-19}J} = 7{,}5\times10^{6}eV$$
$$= 7{,}5\,MeV.$$

c) De la ecuación (23.18), la diferencia de potencial es el trabajo en cada unidad de carga, que es:

$$V_a - V_b = \frac{W_{a\to b}}{q} = \frac{1{,}2\times10^{-12}J}{1{,}602\times10^{-19}C}$$
$$= 7{,}5\times10^{6}J/C = 7{,}5\times10^{6}V = 7{,}5\,MV.$$

Se obtiene el mismo resultado con mas facilidad si se recuerda que 1 electrón-volts es igual a 1 Volts multiplicado por la carga e. Como el trabajo realizado es $7{,}5\times10^{6}$ eV y la carga es e, entonces, la diferencia de potencial es $(7{,}5\times10^{6}eV)/e = 7{,}5\times10^{6}V$.

**Evaluar:** El resultado del inciso c) se comprueba con las ecuaciones (23.17) o (23.18). El angulo $\phi$ entre el campo constante $\vec{E}$ y el desplazamiento es igual a cero, así que la ecuación (23.17) se convierte en:

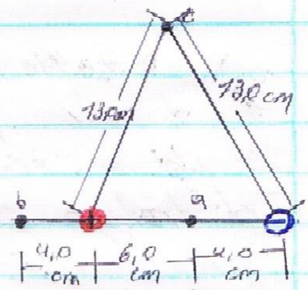
$$V_a - V_b = \int_a^b E\cos\phi\, dl = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\int_a^b dl$$

La integral de $dl$ de $a$ a $b$ es exactamente la distancia $d$, por lo que una vez más se obtiene.

$$V_a - V_b = Ed = (1{,}6\times 10^7 V/m)(0{,}50 m) = 7{,}6\times 10^6 V$$

**Ej: Potencial debido a dos carges puntuales.**

Un dipolo eléctrico está formado por dos carges puntuales, $q_1 = +12nC$ y $q_2 = -12nC$, separades una distancia de 10 cm. Calcule los potenciales eléctricos en los puntos a, b y c.




**Identificar y plantear:** se trata del mismo ordenamiento de carges que el del ejemplo 21.8, donde se calculó el campo eléctrico en cada punto por medio de una suma vectorial. La incognita es el potencial eléctrico V en tres puntos los cuales se obtienen haciendo la suma algebraica en la ecuación (23.15)

**Ejecutar:**

En el punto a tenemos que $r_1 = 0{,}060$ m y $r_2 = 0{,}040 m$ de modo que la ecuación (23.15) se convierte en:

$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$

$$= (9{,}0\times 10^9 N.m^2/C^2)\ \frac{12\times 10^{-9}C}{0{,}060 m} +$$

$$(9{,}0\times 10^9 N.m^2/C^2)\ \left(\frac{-12\times 10^{-9}C}{0{,}040 m}\right)$$

$$= 1800 N.m/C + (-2700 N.m/C)$$

$= 1800 V + (-2700 V) = -900 V$

De forma análoga, se puede demostrar que el potencial en el punto b (donde $r_1 = 0{,}040\ m$ y $r_2 = 0{,}140 m$) es $V_b = 1930\ V$ y que el potencial en el punto c (donde $r_1 = r_2 = 0{,}130\ m$) es $V_c = 0$

## Ej: Potencial y energía potencial.

Calcule la energía potencial asociada con una carga puntual q de $+4.0\ nC$ si se coloca en los puntos a, b y c de la figura anterior.

### Identificar y Plantear:

La energía potencial U asociada con una carga puntual q, en un lugar donde el potencial eléctrico sea V, es $U = q.V$. Se utilizan los valores de V del ejemplo anterior.

### Ejecutar:

En los tres puntos obtenidos

$$U_a = q.V_a = (4{,}0 \times 10^{-9} C)(-900\ J/C) = -3{,}6 \times 10^{-6} J$$
$$U_b = q.V_b = (4{,}0 \times 10^{-9} C)(1930\ J/C) = 7{,}7 \times 10^{-6} J$$
$$U_c = q.V_c = 0$$

Todos estos valores se obtienen al considerar U y V igual a cero en el infinito.

**Evaluar:** Se observa que el trabajo neto sobre la carga de $4.0\ nC$ es cero si ésta se desplaza del punto c al infinito por cualquier trayectoria. En particular, considere la trayectoria a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que une las otras dos cargas $q_1$ y $q_2$. Por lo tanto, la fuerza sobre la carga de $4.0\ nC$ es perpendicular a la trayectoria, y no se realiza ningún trabajo en cualquier desplazamiento a lo largo de ella.

Ej: Cálculo del potencial por integración.

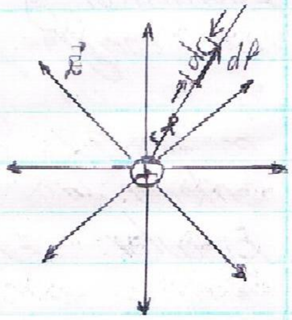
Integrando el campo eléctrico como en la ecuación (23.17), calcule el potencial a una distancia r de una carga puntual q.

Identificar y plantear:

Ubicamos el punto a de ecuación (23.17) a una distancia r y el punto b en el infinito. Como de costumbre, hacemos que el potencial sea cero a una distancia infinita de la carga q.

Ejecutar:

Para resolver la integral, podemos elegir cualquier camino entre los puntos a y b. El más conveniente es una línea recta radial como se muestra en la figura, de manera que $d\vec{l}$ esté en la dirección radial y tenga magnitud dr. Al escribir $d\vec{l} = \hat{r}dr$, a partir de la ecuación (23.17):




$$V - 0 = V = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

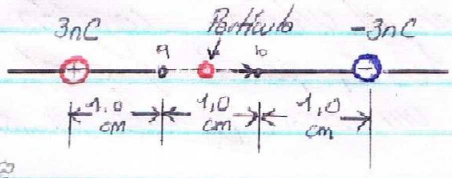
$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_r^{\infty} = 0 - \left( -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Evaluar: Este resultado concuerda con la ecuación (23.14) y es correcto para una carga q positiva o negativa.

## Ej: Movimiento a través de una diferencia de potencial.

En la siguiente figura, una partícula de polvo, cuya masa es $m = 5,0\times10^{-9}\,Kg = 5,0\,\mu g$ y con una carga $q_0 = 2,0\,nC$, parte del reposo en un punto a y se mueve en línea recta hasta un punto b. ¿Cuál es su rapidez v en el punto b?

**Identificar y plantear:**




sobre la partícula actúa sólo la fuerza eléctrica conservativa, por lo que la energía mecánica se conserva: $K_a + U_a = K_b + U_b$. Las energías potenciales U se obtienen de los potenciales V correspondientes usando la ecuación (23.13): $U_a = q_0 V_a$ y $U_b = q_0 V_b$.

**Ejecutar:**

Tenemos que $K_a = 0$ y $K_b = \frac{1}{2} m v^2$. Al sustituir esto y las expresiones de $U_a$ y $U_b$ en la ecuación de conservación de la energía y despejar v, se encuentra que:

$$0 + q_0 V_a = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V_b$$

$$v = \sqrt{\frac{2q_0 (V_a - V_b)}{m}}$$

se calcula los potenciales usando la ecuación (23.15), $V = q/4\pi\epsilon_0 r$: $V_a = (9.0\times10^{9}\,N.m^2/C^2)\times$

$$\left(\frac{3,0\times10^{-9}C}{0,010\,m} + \frac{(-3,0\times10^{-9}C)}{0,020\,m}\right) = 1350\,V$$

$$V_b = (9,0\times10^{9}\,N.m^2/C^2)\times\left(\frac{3,0\times10^{-9}C}{0,020\,m} + \frac{(-3,0\times10^{-9}C)}{0,010\,m}\right) = -1350\,V$$

$$V_a - V_b = (1350\,V) - (-1350\,V) = 2700\,V$$

Finalmente,

$$v = \sqrt{\frac{2(2{,}0\times10^{-9}C)(2700V)}{5.0\times10^{-9}Kg}} = 46\ m/s$$

**Evaluar:** El resultado es razonable: la partícula de polvo positiva gana rapidez conforme se aleja de la carga de $+3.0\,nC$ y se acerca a la carga de $-3{,}0\,nC$. Para comprobar la consistencia de las unidades en el ultimo renglón del cálculo, se observa que $1V = 1J/C$, por lo que el numerador bajo el radical tiene unidades iguales a $J$ o $Kg\cdot m^2/s^2$.

**Evalúe su comprensión:** Si el potencial eléctrico en cierto punto es igual a cero, ¿el campo eléctrico en ese punto tiene que ser cero? (sugerencia: Considere el punto c de los ejemplos 23.4 y 21.8)

**Respuesta:** No.

Si $V=0$ en cierto punto, $\vec{E}$ no tiene que ser igual a cero en ese punto. Un ejemplo de esto es el punto c en las figuras 21.23 y 23.13, para el que hay un campo eléctrico en dirección $+x$ (vea el ejemplo 21.9 en la sección 21.5) aun cuando $V=0$ (vea el ejemplo 23.4). Este resultado no es sorprendente, ya que $V$ y $\vec{E}$ son cantidades muy diferentes: $V$ es la cantidad neta de trabajo que se requiere para llevar una carga unitaria del infinito al punto en cuestión, mientras que $\vec{E}$ es la fuerza eléctrica que actúa sobre una unidad de carga cuando llega a ese punto.

# Cálculo del potencial eléctrico.

Cuando se calcula el potencial debido a una distribución de carga, por lo general se sigue uno de dos caminos. Si se conoce la distribución de carga se emplea la ecuación (23.15) o la (23.16). O si se conoce el modo en que el campo eléctrico depende de la posición, se usa la ecuación (23.17) haciendo el potencial igual a cero en algún lugar conveniente. Algunos problemas requieren una combinación de estos enfoques.

**Ej: Esfera conductora con carga.**

Una esfera conductora sólida de radio R tiene una carga total q. Determine el potencial eléctrico en todos los puntos, tanto fuera como dentro de la esfera.

**Identificar y plantear:** En el ejemplo 22.5 (seccion 22.4) se empleo la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico en todos los puntos para esta distribución de carga. El resultado se puede utilizar para determinar el potencial correspondiente.

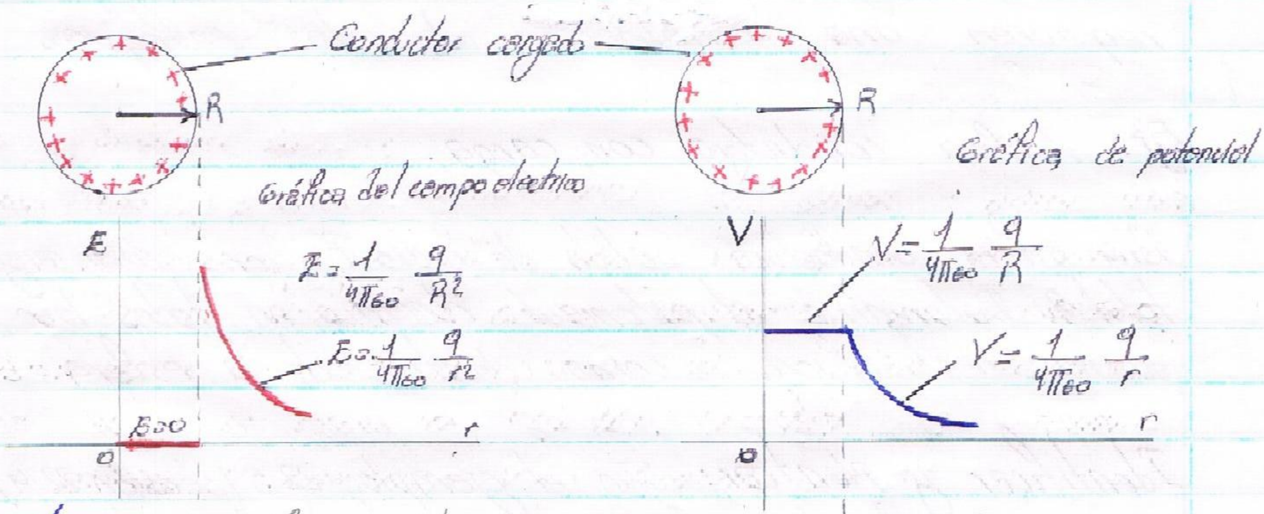
**Ejecutar:** Del ejemplo 22.5, el campo afuera de la esfera es el mismo que si la esfera se eliminara y se sustituyera por una carga puntual q. Se considera $V=0$ en el infinito, como se hizo para una carga puntual. Por lo tanto, el potencial en un punto en el exterior de la esfera a una distancia r de su centro es el mismo que el potencial debido a una carga puntual q en el centro:

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$$

El potencial en la superficie de la esfera es

$V_{superficie} = q/4\pi\epsilon_0 R$.

En el interior de la esfera, $\vec{E}$ es igual a cero en todos los puntos. De esta forma, no se efectúa ningun trabajo sobre la carga de prueba que se mueve de un punto a otro dentro de la esfera. Esto significa que el potencial es el mismo en cualquier punto del interior de la esfera y es igual a su valor $q/4\pi\epsilon_0 R$ en la superficie




**Evaluar:** La figura ilustra el campo y el potencial para una carga positiva $q$. En este caso, el campo eléctrico apunta radialmente alejandose de la esfera. Conforme nos alejamos de la esfera en dirección de $\vec{E}$, V disminuye (como debe ser).

## Ionización y descarga de una corona.

El potencial máximo que puede aplicarse a un conductor en el aire, se ve limitado porque las moleculas de aire se ionizan y el aire se convierte en un conductor a una magnitud de campo electrico aproximadamente $3 \times 10^6 V/m$. Supongamos que $q$ es positiva. Cuando se comparan las expresiones del ejemplo anterior, del potencial $V_{superficie}$ y la magnitud del campo $E_{superficie}$ en la superficie de la esfera con carga, se observa que $V_{superficie} = E_{superficie} R$. Así, si $E_m$ representa la magnitud del campo eléctrico a la que el aire se vuelve conductor (lo que se conoce como resistencia dieléctrica del aire), entonces, el potencial máximo $V_m$ que se puede aplicar a un conductor esférico es:

$$V_m = RE_m$$

Para lograr potenciales aún mayores, las máquinas de alto voltaje como los generadores Van de Graff usan terminales esféricas con radios muy grandes. Por ejemplo, una terminal de radio $R = 2m$ tiene un potencial máximo $V_m = (2m)(3 \times 10^6\ V/m) = 6 \times 10^6\ V = 6MV$

Como el potencial máximo es proporcional al radio, incluso potenciales relativamente pequeños aplicados a puntas agudas en el aire producen campo lo suficientemente elevados justo afuera de las puntas para ionizar el aire circundante y convertirlo en un conductor. La corriente resultante y el resplandor asociado con ella (visible en un cuarto oscuro) se llama corona.

En situaciones en que es importante evitar que exista una corona, se usan conductores de radio grande. Un ejemplo son los pararrayos metálicos. Si hay un exceso de carga en la atmósfera, como ocurre durante las tormentas eléctricas, en el extremo redondeado se acumula una cantidad sustancial de carga del signo contrario. Como resultado, cuando la carga atmosférica se descarga a través de relámpagos tiende a verse atraída hacia el pararrayos y no hacia otras estructuras cercanas. (Un cable conductor que conecta el pararrayos con el suelo permitirá que la carga adquirida se disperse de forma inofensiva). Un pararrayos con extremo agudo permitirá que se acumulara menos carga y por ello sería menos eficaz.

**Ej: Placas paralelas con cargas opuestas**

Obtenga el potencial a cualquier altura entre las dos placas paralelas con cargas opuestas, que se estudieron en la sección 23.1.

**Identificar y planear:** Analizamos esta situación anteriormente. Por la ecuación (23.6), sabemos que la energía potencial eléctrica $U$ para una carga de prueba $q_0$ es $U = q_0 E y$ (hacemos que $y = 0$ y $U = 0$ en la placa inferior). Se usa la ecuación (23.12), $U = q_0 V$, para determinar el potencial eléctrico $V$ en función de $y$.

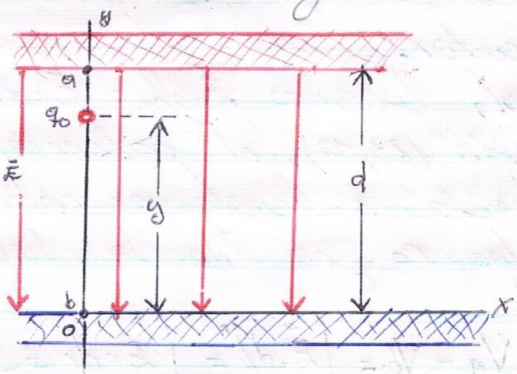
**Ejecutar:** El potencial $V(y)$ en la coordenada $y$ es la energía potencial por unidad de carga:

$$V(y) = \frac{U(y)}{q_0} = \frac{q_0 E y}{q_0} = Ey$$

El potencial disminuye conforme nos movemos en la dirección de $\vec{E}$ de la placa superior a la inferior. En el punto a, donde $y = d$ y $V(y) = V_a$,

$$V_a - V_b = Ed \quad y \quad E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d}$$

donde Vab es el potencial de la placa positiva con respecto a la placa negativa. Es decir el campo eléctrico es igual a la diferencia de potencial entre las placas dividida entre la distancia que la separa. Para una diferencia de potencial dada Vab, cuanto más pequeña sea la distancia d entre las dos placas, mayor será la magnitud de E del campo eléctrico.




(Esta relación entre E y Vab se cumple solo para la geometría plana descrita. No funciona en situaciones que implica cilindros o esferas concéntricos donde el campo eléctrico no es uniforme).

Evaluar: El resultado nos indica que $V=0$ en la placa inferior (en $y=0$), lo cual es congruente con la elección de $U=q_0V=0$ para una carga de prueba colocada en la placa inferior.

Ej: Una línea infinita con carga o un cilindro conductor con carga.

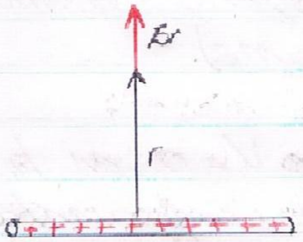
Obtenga el potencial a la distancia r desde una línea muy larga de carga con densidad de carga lineal $\lambda$ (carga por unidad de longitud).

**Identificar y plantear:** Tanto en el ejemplo 21.10 y 22.6, se determinó que el campo eléctrico a una distancia radial r de una línea recta y larga de carga (figura a) sólo tiene una componente radial, dada por: $E_r = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$. Esta expresión se utiliza para obtener el potencial por integración de $\vec{E}$, como en la ecuación (23.17)

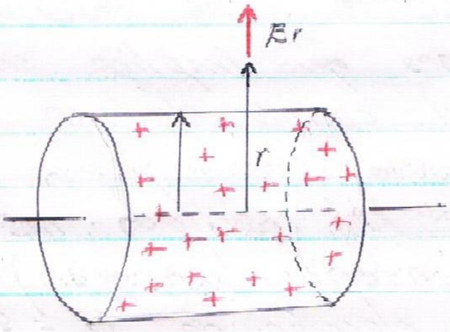
**Ejecutar:** Como el campo sólo tiene una componente radial, tenemos $\vec{E}\cdot d\vec{l} = E_r dr$. Así, de acuerdo con la ecuación (23.17), el potencial de cualquier punto a con respecto a cualquier otro punto b, a distancias radiales $r_a$ y $r_b$ de la línea de carga es:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r\, dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

a)




b)




Si se toma el punto b en el infinito y se establece que $V_b = 0$, se determina que $V_a$ es infinito para cualquier distancia finita $r_a$ a partir de la línea cargada: $V_a = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(\infty/r_a) = \infty$. ¡Ésta no es una manera útil de definir V para este problema! La dificultad está en que la distribución de carga en sí se extiende al infinito.

Para sortear la dificultad, como se recomendó en la estrategia para resolver problemas, establecemos que $V_b = 0$ en el punto b a una distancia radial arbitraria pero finita $r_0$. Así el potencial $V = V_a$ en el punto a a una distancia radial r está dado por $V - 0 = (\lambda/2\pi\epsilon_0) \ln (r_0/r)$ o bien:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

**Evaluar:** De acuerdo con el resultado, si $\lambda$ es positiva entonces V disminuye conforme r aumenta. Es así como debería ser: V decrece conforme nos movemos en la dirección de $\vec{E}$.
En el interior del cilindro, $\vec{E} = 0$ y V tiene el mismo valor (cero) que en la superficie del cilindro.

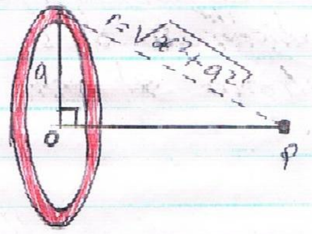
## Ej: Anillo con carga

Una carga eléctrica Q está distribuida de manera uniforme alrededor de un anillo delgado de radio a. Determine el potencial en un punto P sobre el eje del anillo a una distancia x del centro del anillo.

**Identificar y plantear:**
Se divide el anillo en segmentos infinitesimales y se usa la ecuación (23.16) para obtener V. Todas las partes del anillo (es decir, todos los elementos de la distribución de carga) están a la misma distancia de P.

**Ejecutar:** La figura muestra que la distancia entre cada elemento de carga dq sobre el anillo y el punto P es $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. Aquí se saca de la integral el factor $1/r$ de la ecuación (23.6), y

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$




**Evaluar:** Cuando $x$ es mucho más grande que $a$, la expresión para $V$ se vuelve aproximadamente igual a $V = Q/4\pi\epsilon_0 x$, que es el potencial de una carga $Q$ a una distancia $x$ de la carga puntual $Q$. A una distancia muy lejana del anillo con carga, su potencial eléctrico se asemeja al de una carga puntual. Conocemos el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje $x$, de modo que se puede calcular $V$ a lo largo de este eje integrando $\vec{E}\cdot d\vec{l}$.

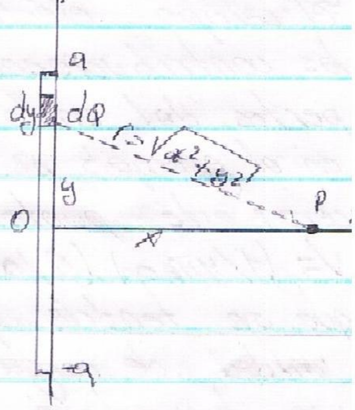
## Ej: Potencial de una línea de carga

Una carga eléctrica positiva $Q$ está distribuida de manera uniforme a lo largo de una línea de longitud $2a$ que se encuentra a lo largo del eje $y$, entre $y = -a$ y $y = +a$. Determine el potencial eléctrico en el punto $P$ sobre el eje $x$ a una distancia $x$ del origen.

**Identificar y Planear:** Se puede calcular $V$ en el punto $P$ integrando sobre la distribución de carga con la ecuación (23.16). A diferencia de la situación anterior, cada elemento de carga $dQ$ se encuentra a una distancia diferente del punto P, así que la integral será un poco más complicada.

**Ejecutar:** El elemento de carga $dQ$ que corresponde a un elemento de longitud $dy$ sobre la varilla es $dQ = (Q/2a)dy$. La distancia de $dQ$ a $P$ es $\sqrt{x^2+y^2}$, y la contribución $dV$ que el elemento de carga hace al potencial en P es:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$




Para determinar el potencial en P debido a toda la varilla, se integra $dV$ sobre la longitud de la varilla, de $y = -a$ a $y = a$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

La integral se puede consultar en una tabla. El resultado final es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{\sqrt{a^2+x^2}-a}\right)$$

**Evaluar:** El resultado se comprueba haciendo que $x$ se aproxime al infinito. En este límite, el punto P está infinitamente lejos de toda la carga, por lo que habría que esperar que V tienda a cero.

**Evalúe su comprensión:** Si el campo eléctrico en cierto punto es igual a cero, ¿el potencial eléctrico en ese punto tiene que ser igual a cero? (sugerencia: Considere el centro del anillo en los ejemplos 23.11 y 21.9).

**Respuesta:** No. Si $\vec{E}=0$ en cierto punto, V no tiene que ser igual a cero en ese punto. Un ejemplo es el punto O en el centro del anillo con carga en las figuras 21.23 y 23.21. De acuerdo con el ejemplo 21.9, el campo eléctrico es igual a cero en O ya que las contribuciones del campo eléctrico de las diferentes partes del anillo se anulan por completo. Sin embargo, en el ejemplo 23.11, el potencial en O no es igual a cero: este punto corresponde a $x=0$, por lo que $V=(1/4\pi\varepsilon_0)(Q/a)$. Este valor de V corresponde al trabajo que se tendría que efectuar para desplazar una unidad de carga de prueba positiva a lo largo de una trayectoria del infinito al punto O; no es igual a cero porque el anillo con carga repele la carga de prueba, así que debe efectuarse trabajo positivo para llevar la carga de prueba en dirección del anillo.

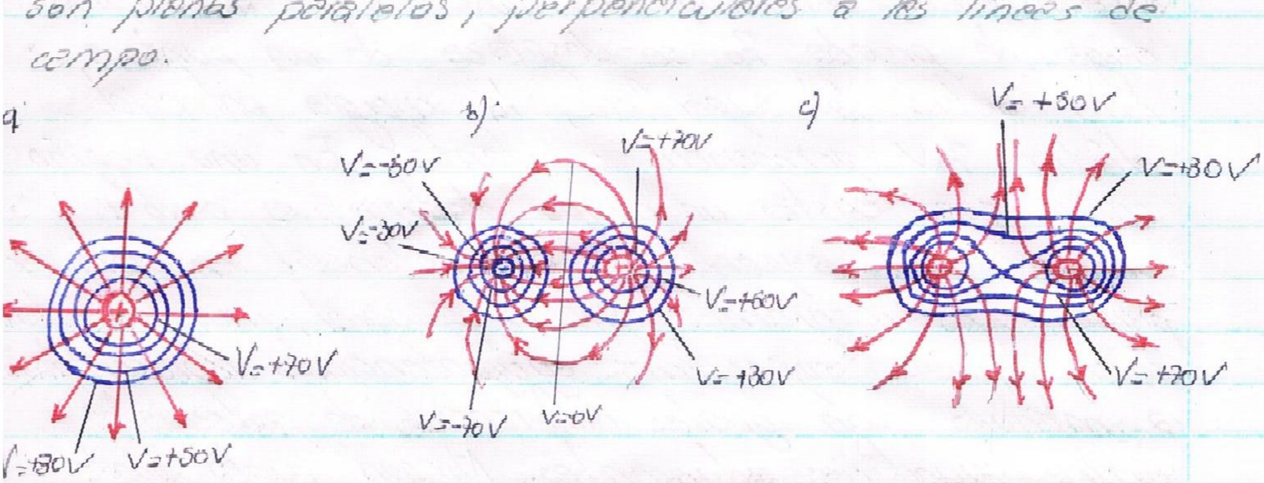
## Superficies equipotenciales.

El potencial en varios puntos de un campo eléctrico puede representarse gráficamente por medio de superficies equipotenciales, las cuales utilizan la misma idea fundamental que los mapas topográficos.

Por analogía con las curvas de nivel en un mapa topográfico, una superficie equipotencial es una superficie tridimensional sobre la que el potencial eléctrico V es el mismo en todos los puntos. Si una carga de prueba $q_0$ se desplaza de un punto a otro sobre tal superficie, la energía potencial eléctrica $q_0V$ permanece constante. En una región en la que existe un campo eléctrico, es posible construir una superficie equipotencial en cualquier punto. Los diagramas, por lo general, muestran tan sólo algunas superficies equipotenciales representativas a menudo con iguales diferencias de potenciales entre superficies adyacentes. Ningun punto puede tener dos potenciales diferentes, por lo que las superficies equipotenciales de distintos potenciales nunca se tocan ni se intersecan.

## Superficies equipotenciales y líneas de campo.

Como la energía no cambia a medida que una carga de prueba se mueve sobre una superficie equipotencial, el campo eléctrico no realiza trabajo sobre esa carga. De ello se deduce que $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la superficie en cada punto, de manera que la fuerza eléctrica $q_0\vec{E}$ siempre sea perpendicular al desplazamiento de una carga que se mueve sobre la superficie. Las líneas de campo y las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares entre sí. En general, las líneas de campo son curvas y las equipotenciales son superficies curvas. Para el caso especial de un campo uniforme, donde las líneas de campo son rectas, paralelas y estan igualmente espaciadas, las superficies equipotenciales son planos paralelos, perpendiculares a las líneas de campo.

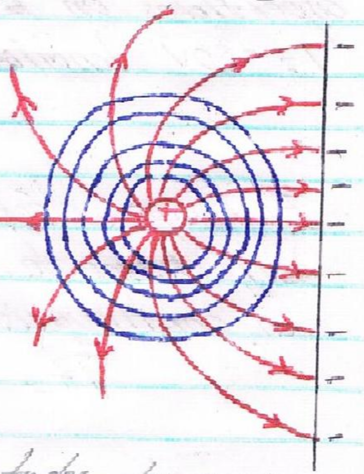



En las imágenes, hay tres configuraciones de carga. las líneas de campo en el plano de las cargas están representadas por líneas rojas, y las intersecciones de las superficies equipotenciales con este plano (es decir, las secciones transversales de estas superficies) se indican en color azul. Las superficies equipotenciales reales son tridimencionales. En cada cruce de una línea equipotencial con una línea de campo, ambas son perpendiculares.

En las regiones donde la magnitud de $\vec{E}$ es grande, las superficies equipotenciales están cercanas entre sí porque el campo efectúa una cantidad relativamente grande de trabajo sobre una carga de prueba en un desplazamiento relativamente pequeño. Éste es el caso cerca de la carga puntual o entre las dos cargas puntuales. Observe que en estas regiones las líneas de campo también están próximas, lo cual tiene una analogía directa con la fuerza de la gravedad cuesta abajo, que es mayor en las regiones de un mapa topográfico donde las curvas de nivel están más cerca entre sí.

## Equipotenciales y conductores.

Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor es una superficie equipotencial. Como el campo eléctrico $\vec{E}$ siempre es perpendicular a una superficie equipotencial, el enunciado se puede demostrar si se prueba que cuando todas las cargas están en reposo, el campo eléctrico justo afuera de un conductor debe ser perpendicular a la superficie en cada punto. Se sabe que $\vec{E}=0$ en todos los lugares del interior del conductor; de otro modo las cargas se moverían. En particular, en cualquier punto apenas dentro de la superficie, la componente de $\vec{E}$ tangente a la superficie es cero. Se deduce que la componente tangencial de $\vec{E}$ también es igual a cero inmediatamente afuera de la superficie.



También se deduce que cuando todas las cargas están en reposo, el volumen completo de un conductor sólido tiene el mismo potencial. La ecuación (23.17) establece que la diferencia de potencial entre dos puntos a y b dentro del volumen de un conductor sólido, $V_a-V_b$, es igual a la integral de línea $\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$ del campo eléctrico de a a b. Como $\vec{E}=0$ en todos los lugares del interior del conductor, la integral garantiza un valor de cero para dos puntos a y b cualesquiera. De modo que el potencial es el mismo para dos puntos cualesquiera dentro del volumen del conductor. Esto se describe diciendo que el volumen del conductor es un volumen equipotencial.

Evalúe su comprensión: ¿Cambiarían las formas de las superficies equipotenciales en la figura 23.23, si se invirtiera el signo de cada carga?

Respuesta: No. Si las cargas positivas en la figura 23.23 se sustituyeran por cargas negativas, y viceversa, las superficies equipotenciales serían iguales, pero se invertiría el signo del potencial. Por ejemplo, las superficies en la figura 23.23b con potencial $V=+30V$ y $V=-50V$ tendrían potenciales $V=-30V$ y $V=+50$, respectivamente.

## Gradiente de potencial

El campo eléctrico y el potencial se relacionan estrechamente. La ecuación (23.17), que se replantea a continuación, expresa un aspecto de esa relación:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si se conoce $\vec{E}$ en varios puntos, esta ecuación se puede utilizar para calcular las diferencias de potenciales. Veremos cómo hacer lo contrario: si se conoce el potencial $V$ en varios puntos, es posible determinar $\vec{E}$. Considerando que $V$ es función de las coordenadas $(x,y,z)$ de un punto en el espacio, se demostrará que las componentes de $\vec{E}$ se relacionan directamente con las derivadas parciales de $V$ con respecto a $x$, $y$ y $z$.

En la ecuación (23.17), $V_a - V_b$ es el potencial de a con respecto a b, es decir, el cambio de potencial en un desplazamiento de b a a. Esto se escribe como:

$$V_a - V_b = \int_b^a dV = -\int_a^b dV$$

donde $dV$ es el cambio infinitesimal del potencial asociado a un elemento infinitesimal $d\vec{l}$ de la trayectoria de b a a. Esto se escribe como:

$$-\int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Estas dos integrales deben ser iguales para cualquier par de límites a y b, y para que esto se cumpla, los integrandos deben ser iguales. Por lo tanto, para cualquier desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$,

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para interpretar esta expresión, se escribe $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ en términos de sus componentes $\vec{E} = \hat{\imath} E_x + \hat{\jmath} E_y + \hat{k} E_z$ y $d\vec{l} = \hat{\imath} dx + \hat{\jmath} dy + \hat{k} dz$. Entonces se tiene que:

$$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Suponga que el desplazamiento es paralelo al eje x, por lo que $dy = dz = 0$. Entonces, $-dV = E_x dx$ o $E_x = -(dV/dx)_{y,z}$ constantes, donde el subíndice nos recuerda que en la derivada sólo varía x; recuerde que V, en general, es una función de x, y y z. Pero esto es exactamente lo que significa la derivada parcial $\partial V/\partial x$. Las componentes y y z de $\vec{E}$ se relacionan con las derivadas correspondientes de V en la misma forma, por lo que se tiene:

cada componente del campo eléctrico

componentes del campo eléctrico obtenidos a partir del potencial

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$ ecuación: 23.19

es igual al negativo de la derivada parcial correspondiente de la función V del potencial eléctrico.

Esto es congruente con las unidades de campo eléctrico, V/m. En términos de vectores unitarios, $\vec{E}$ se escribe como:

campo eléctrico

Vector del campo eléctrico obtenido del potencial:

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$ ecuación: 23.20

Derivadas parciales de la función V del potencial eléctrico

La siguiente operación se llama gradiente de la función f:

$$\vec{\nabla} f = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f$$ ecuación: 23.21

El operador denotado por el símbolo $\vec{\nabla}$ se llama "grad" o "del". Así, en notación vectorial,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$ ecuación 23.22

que se lee como: "$\vec{E}$ es el negativo del gradiente V" o "$\vec{E}$ es igual al grad negativo de V." La cantidad $\vec{\nabla}$ se llama gradiente de potencial.

En cada punto, el gradiente de potencia $\vec{\nabla}V$ apunta en la dirección en que V se incrementa con más rapidez con un cambio de posición. De modo que, en cada punto, la dirección $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ es la dirección en la cual V disminuye más rápido y siempre es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa a través del punto.

La ecuación (23.22) no depende de la elección particular del punto cero para V. Si se cambiara el punto cero, el efecto sería cambiar V en cada punto en la misma cantidad; las derivadas de V serían las mismas.

Si $\vec{E}$ tiene una componente radial $E_r$ con respecto a un eje, y r es la distancia a partir del punto o eje, la relación correspondiente a las ecuaciones (23.19) es

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \text{ (campo eléctrico radial)}$$ ecuación 23.23

A menudo se puede calcular el campo eléctrico generado por una distribución de carga en cualquiera de dos formas: directamente, con la suma de los campos $\vec{E}$ de cargas puntuales, o primero calculando el potencial y luego obteniendo su gradiente para determinar el campo. Generalmente el segundo método resulta más fácil porque el potencial es una cantidad escalar que requiere, cuando mucho, la integración de una función escalar.

Conviene una vez más destacar que si se conoce $\vec{E}$ en función de la posición, se puede calcular V utilizando la ecuación (23.17) o la (23.18), y si se conoce V en función de la posición, se calcula $\vec{E}$ con las ecuaciones (23.19), (23.20) o (23.23). La obtención de V a partir de $\vec{E}$

requiere integración, y la obtención de $\vec{E}$ a partir de $V$ requiere diferenciación.

## Ej: Potencial y campo de una carga puntual

De acuerdo con la ecuación (23.14), el potencial a una distancia radial $r$ de una carga puntual $q$ es $V = q/4\pi\epsilon_0 r$. Obtenga el campo eléctrico vectorial a partir de esta expresión de $V$.

**Identificar y plantear:** Este problema utiliza la relación general entre el potencial eléctrico en función de la posición y el vector campo eléctrico. Por simetría, el campo eléctrico sólo tiene una componente radial $E_r$, y para encontrarla se usa la ecuación (23.23)

**Ejecutar:** De acuerdo con la ecuación (23.23),

$$E_r = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Por lo tanto el campo eléctrico vectorial es:

$$\vec{E} = \hat{r}E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

**Evaluar:** El resultado concuerda con la ecuación (21.7), como debe ser.

Un enfoque alternativo considere ignorar la simetría radial, escriba la distancia radial como $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y tomar las derivadas de $V$ con respecto a $x$, $y$ y $z$ como en la ecuación (23.20). Se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

y de manera similar,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

De acuerdo con la ecuación (23.20)

$$\vec{E} = -\left[\hat{\imath}\left(-\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \hat{\jmath}\left(-\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \hat{k}\left(-\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Este enfoque produce la misma respuesta, pero un poco más de esfuerzo. Como resulta evidente, es mejor aprovechar la simetría de la distribución de carga siempre que sea posible.

Ej: Potencial y campo de un anillo con carga.

En el ejemplo 23.11 (sección 23.3) se determinó que para un anillo cargado de radio a y carga total Q, el potencial en el punto P sobre el eje de simetría del anillo a una distancia x del centro es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Calcule el campo eléctrico P.

Identificar y plantear: Se da V en función de $x$ a lo largo del eje $x$, y se desea obtener el campo eléctrico en un punto sobre este eje. Por simetría de la distribución de carga, el campo eléctrico a lo largo del eje ($x$) de simetría del anillo sólo tiene una componente $x$, la cual se calcula con la primera de las ecuaciones (23.19)

Ejecutar: La componente $x$ del campo eléctrico es:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Evaluar: Esto concuerda con el resultado del ejemplo 21.9.

Evalúe su comprensión: En cierta región del espacio, el potencial está dado por $V = A + Bx + Cy^3 + Dxy$, donde A, B, C y D son constantes positivas. ¿Cuál de estos enunciados sobre el campo eléctrico $\vec{E}$ en esta región del espacio es correcto? (Puede haber más de una respuesta correcta).
i. Aumentar el valor de A incrementará el valor de $\vec{E}$ en todos los puntos; ii. aumentar el valor de A disminuirá el valor de $\vec{E}$ en todos los puntos; iii. $\vec{E}$ no tiene componente z; iv. el campo eléctrico es igual a cero en el origen ($x=0$, $y=0$, $z=0$).

Respuesta: iii. De acuerdo con las ecuaciones (23.19), las componentes del campo eléctrico son $E_x = -\partial V/\partial x = -(B+Dy)$, $E_y = -\partial V/\partial y = -(3Cy^2+Dx)$ y $E_z = -\partial V/\partial z = 0$. El valor de A no tiene efecto, lo cual significa que se puede sumar una constante al potencial eléctrico en todos los puntos sin que cambie $\vec{E}$ o la diferencia de potencial entre dos puntos. El potencial no depende de $z$, por lo que la componente $z$ de $\vec{E} = 0$. Observe que en el origen el campo eléctrico no es igual a cero porque tiene una componente $x$ distinta de cero: $E_x = -B$, $E_y = 0$, $E_z = 0$.